

Дипольно-волновая векторная теория дифракции

В.Г. Низьев «Дипольно волновая теория дифракции электромагнитного излучения»
Успехи физических наук т.172, №5, с.601-607, 2002.

A.V. Nesterov and V.G. Niziev «Vector solution of the diffraction task using the Hertz vector»
Physical Review E 71, 4, 046608, 2005.

Оглавление

Введение	2
1. Классическая теория дифракции	3
2. Уравнения Максвелла и волновые уравнения.....	5
3. Дипольно волновая теория дифракции	6
4. Дифракция излучения на бесконечной щели	10
5. Дифракция линейно поляризованного излучения на отверстии произвольной формы...	17
6. Дифракция линейно поляризованного излучения на прямоугольном отверстии.....	18
7. Дифракция линейно поляризованного излучения на отверстии в виде ромба.	19
8. Дифракция линейно поляризованного излучения на отверстии в виде двойного треугольника	19
9. Дифракция линейно поляризованного излучения на круглом отверстии	20
10. Обсуждение результатов вычислений по дифракции линейно поляризованного излучения на отверстиях различной формы.....	21
11. Суперпозиция решений при дифракции на нескольких отверстиях.....	25
12. Дифракция излучения с азимутальной поляризацией на кольцевой щели	29
13. Дифракция излучения с радиальной поляризацией на кольцевой щели	31
14. Распространение некоторых лазерных пучков в пространстве	32
Заключение.....	34
Литература	36
<i>Приложение 1. Метод Кирхгофа</i>	<i>37</i>
<i>Приложение 2. Границы применимости интеграла Кирхгофа-Коттлера - обобщения метода Кирхгофа на случай векторных полей.....</i>	<i>38</i>
<i>Приложение 3. Электродинамический принцип Гюйгенса в формулировке Коттлера</i>	<i>39</i>
<i>Приложение 4. Сравнение ограничений и физических приближений, лежащих в основе классического подхода и дипольно волновой теории дифракции</i>	<i>40</i>

Введение

Явление дифракции, по существу, является основным в оптике, лазерной физике, теории волновых процессов, теории рассеяния, в задачах распространения радиоволн и теории антенн. В соответствии с этим существует и большое количество физико-математических подходов к решению задач дифракции.

Перечислить весь круг задач, прямо или косвенно связанных с дифракцией невозможно. Приведем для иллюстрации лишь некоторые. Дифракционные явления рассматривают в однородной или неоднородной средах, на границе раздела сред. На шероховатых или периодических поверхностях, на отверстиях в плоских экранах (идеально проводящих или диэлектрических), на трехмерных объектах, больших по сравнению с длиной волны излучения и малых. Дифракция монохроматического света существенно отличается от дифракции излучения, например, импульсных лазеров с короткой длительностью импульса, имеющих большую спектральную ширину излучения.

Наиболее общим и строгим подходом к решению задач дифракции является решение векторных уравнений Максвелла с соответствующими граничными условиями. В силу своей общности такой подход, в принципе, применим к любым задачам дифракции. Физико-математические методы, связанные с таким подходом рассматриваются во многих книгах и монографиях, например, [1-6]. Однако, большие математические трудности на этом пути серьезно ограничивают практическое использование таких решений. Так, даже формально строгое решение для дифракции на круглом отверстии [7, 8] практически невозможно использовать из-за плохой сходимости рядов, в виде которых оно выражается [1, 3, 9]. При решении конкретных задач обычно применяют физические упрощения и приближенные вычисления, широко используют численные методы.

Известно множество методов приближенных решений задач дифракции на основе принципа Гюйгенса. Суть их в том, что, если на какой-то поверхности поле задано (имеется в виду амплитуда, фаза, направление), то и в других точках пространства поле дифракции может быть вычислено. Конечно, не все задачи дифракции могут решаться таким методом, поскольку далеко не всегда может быть выделена поверхность с известным распределением поля. Типичными для этих методов являются задачи дифракции на отверстиях различной формы в непрозрачном экране. Строго говоря, и здесь поле на отверстии отличается от невозмущенного, вследствие влияния краев отверстия. Но при относительно больших отверстиях эти искажения невелики и часто вполне оправдано поле на отверстии считать невозмущенным. Методы решений задач дифракции на основе принципа Гюйгенса часто, являются комбинированными и используют как представления геометрической оптики, так и

волновой подход. Классическим примером такого рода является метод зон Френеля. Аналогичный подход реализуется в методе Дебая для описания поля при острой фокусировке и в ряде других [4]. Полуэмпирические подходы, реализуемые в этих методах, определяют и жесткие рамки их применимости.

1. Классическая теория дифракции.

Метод Кирхгофа для описания дифракции электромагнитного поля является наиболее известным. Он является чисто волновым подходом к решению задачи дифракции. Вывод скалярного интеграла Кирхгофа основан на волновом уравнении и строгой математической логике [4, 10-12], он воспроизводится в приложении 1. Интеграл Кирхгофа позволяет вычислять поле дифракции по полю, заданному на какой-то поверхности. Однако, как хорошо известно, область применимости скалярного интеграла Кирхгофа также весьма узка. Причины таких ограничений чисто физические и заложены в самой постановке задачи. Поскольку излагаемая ниже дипольно-волновая теория дифракции базируется на методе Кирхгофа, необходимо дать детальный критический анализ классического подхода. Интеграл Кирхгофа выводится на основе двух скалярных волновых уравнений: для функции Грина и для поля, распространяющегося в свободном пространстве. Скалярное волновое уравнение для поля в свободном пространстве заведомо не содержит информацию об изменении его направления. А скалярное уравнение для функции Грина дает решение в виде простейшей сферической волны от точечного источника с однородным направлением поля. Однако, в силу поперечного характера электромагнитного поля существование такой волны невозможно. С формальной точки зрения решение волнового уравнения для поля не эквивалентно решению уравнений Максвелла, а “независимое” скалярное покомпонентное рассмотрение векторной задачи необоснованно. Поэтому решения на основе скалярного интеграла Кирхгофа не удовлетворяют уравнению Максвелла $\text{div}\mathbf{E}=0$, а приближенное описание дифракционной картины таким методом корректно только в небольшом телесном угле. Есть только один, весьма частный случай, когда скалярный интеграл Кирхгофа может быть применен без указанных ограничений, о нем будет упомянуто ниже.

Известно обобщение метода Кирхгофа на случай векторных полей - интеграл Кирхгофа-Коттлера [4, 10, 12, 13]. Общая идея состоит в применении скалярного интеграла Кирхгофа в отношении компонент разложения поля с последующим векторным сложением полученных решений. Характеризуя эмпирический характер такого подхода авторы классической монографии [10] указывают на то, что он не имеет физической интерпретации, а решения полученные на его основе не соответствуют уравнению $\text{div}\mathbf{E}=0$. Все недостатки скалярного подхода, автоматически переносятся и на интеграл Кирхгофа-Коттлера, поэтому решения на

его основе справедливы лишь в ограниченной области параметров задачи и узкой зоне рассмотрения дифракционной картины (см. приложение 2). Формальные аспекты корректных методов “скаляризации” векторных электродинамических уравнений рассматриваются, в частности, в книге [14].

По ходу изложения мы будем также обращаться и к так называемой электродинамической формулировке принципа Гюйгенса предложенной Коттлером [10, 11] (ЭД-теории). Исходной точкой теории является введение “поверхностных эквивалентных токов”, определяемых через заданные на диафрагме поля. Эта теория воспроизводится в приложении 3.

Коттлер предложил [15-17] ввести в решение дополнительный контурный (вдоль края отверстия) интеграл. Необходимость такого введения Коттлер объяснял наличием распределенных вдоль контура отверстия электрических и магнитных зарядов. Здесь предпринята попытка, уточнить распределение поля в отверстии и, тем самым, расширить границы применимости метода. Чтобы понять значение этого интеграла обсудим вначале границы применимости метода Кирхгофа. Говоря об ограничениях, связанных с применением метода следует иметь в виду, что, их природа двоякая. Во первых, они возникают как следствие математических приближений, позволяющих вычислять интеграл аналитически. К таковым относятся хорошо известные соотношения: $kr \gg 1$ $ka \gg 1$, где k - волновой вектор, a - характерный размер апертуры, r - расстояние от края апертуры до точки наблюдения. Во вторых, есть очень существенное и жесткое физическое ограничение. Часто при решении задач дифракции в качестве заданного поля на апертуре берут невозмущенное поле падающей волны. Однако, это справедливо лишь при достаточно больших отверстиях, когда площадь зоны, примыкающей к краю отверстия (ее ширина, очевидно, порядка длины волны) мала по сравнению с площадью самого отверстия. Контурный интеграл позволяет на основе физических соображений уточнить распределение поля в отверстии с учетом влияния краев. Это оказывается полезным в двух случаях. При расчете поля на больших расстояниях можно рассматривать дифракцию на меньших отверстиях, а также при расчете поля дифракции на малых расстояниях от края диафрагмы, где нельзя пренебрегать искажениями поля при любом размере отверстия. Однако введение этого интеграла не может “скомпенсировать” недостатки, заложенные в самом методе Кирхгофа: скалярном интеграле и в векторном обобщении.

Целью настоящей работы является создание физически обоснованной и математически корректной векторной теории дифракции, использующей логику метода Кирхгофа и получение на ее основе аналитических решений нескольких базовых задач дифракции. Рамки применимости теории несколько шире, чем классического подхода. Здесь также

работают известные ограничения на размер отверстия, но отсутствует требование, свойственное скалярному подходу на малые телесные углы рассмотрения, где направление вектора поля практически не меняется.

2. Уравнения Максвелла и волновые уравнения

Основой для решения задач электродинамики являются уравнения Максвелла. Для вакуума $\epsilon=1$, $\mu=1$ и уравнения записываются в виде:

$$\begin{aligned} \text{а) } \operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{1}{c} \dot{\mathbf{H}} &= 0, & \operatorname{div} \mathbf{E} &= 4\pi\rho, \\ \text{б) } \operatorname{rot} \mathbf{H} - \frac{1}{c} \dot{\mathbf{E}} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, & \operatorname{div} \mathbf{H} &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Положим, что заряды и токи отсутствуют $\mathbf{j}=0$, $\rho=0$. Рассмотрим монохроматическое излучение с временной зависимостью типа $\sim \exp^{-i\omega t}$. Тогда уравнения (1) можно переписать в виде:

$$\begin{aligned} \text{а) } \operatorname{rot} \mathbf{E} + ik\dot{\mathbf{H}} &= 0, & \operatorname{div} \mathbf{E} &= 0, \\ \text{б) } \operatorname{rot} \mathbf{H} - ik\dot{\mathbf{E}} &= 0, & \operatorname{div} \mathbf{H} &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Строгое решение задачи дифракции должно соответствовать выписанным векторным уравнениям. Нужно обратить особое внимание на то, что а) электрическое и магнитное поля связаны между собой, б) компоненты вектора \mathbf{E} или \mathbf{H} также не являются независимыми, они связаны уравнениями $\operatorname{div} \mathbf{E}=0$ и $\operatorname{div} \mathbf{H}=0$, соответственно.

Уравнения Максвелла часто удобно привести к одному уравнению второго порядка, волновому уравнению либо для \mathbf{E} , либо для \mathbf{H} , либо для каким-либо образом введенной вспомогательной функции (потенциала), из которой \mathbf{E} и \mathbf{H} находят затем дифференцированием.

В однородной среде, свободной от токов, поля \mathbf{E} и \mathbf{H} удовлетворяют волновым уравнениям:

$$\text{а) } \Delta \mathbf{E} + k^2 \mathbf{E} = 0, \quad \text{б) } \Delta \mathbf{H} + k^2 \mathbf{H} = 0 \quad (3)$$

В этих формулах лапласиан Δ действует на вектор. Примененный к любому вектору \mathbf{M} , он определен формулой

$$\Delta \mathbf{M} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{M} - \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{M} \quad (4)$$

Уравнения (3) получены из (2), но не эквивалентны им. Уравнения:

$$\text{а) } \operatorname{div} \mathbf{E} = 0, \quad \text{б) } \operatorname{div} \mathbf{H} = 0 \quad (5)$$

не следуют из (3). Совокупность уравнений (3) и (5) тоже не эквивалентна (2). Например, она допускает решение $\mathbf{E} \neq 0$ и $\mathbf{H} \equiv 0$, не удовлетворяющее (2). Связь полей \mathbf{E} и \mathbf{H} содержится только в (2). Поэтому, корректный порядок действий должен быть, например, такой. **Решив (3а), следует решение подчинить еще условию (5а), а \mathbf{H} найти из (2). Уравнение (3б) будет удовлетворяться автоматически.**

В точках пространства, где есть токи, волновые уравнения для полей содержали бы производные от токов. Проще иногда вводить потенциалы, которые удовлетворяют волновым уравнениям, содержащим, как и уравнения Максвелла, сами токи, а не производные от них, а затем поля находить дифференцированием потенциалов. Одним из таких потенциалов является электрический вектор Герца \mathbf{Z} , пропорциональный векторному потенциалу. Поля выражаются через него по формулам

$$\mathbf{E} = \text{rot rot } \mathbf{Z}, \quad \mathbf{H} = ik \cdot \text{rot } \mathbf{Z} \quad (6)$$

а сам он удовлетворяет простому волновому уравнению

$$\Delta \mathbf{Z} + k^2 \mathbf{Z} = i \frac{4\pi}{\omega} \mathbf{j} \quad (7)$$

Прямая проверка показывает, что если выполняется (7), то поля (6) удовлетворяют уравнениям (2), так что при использовании (7) не нужно требовать, чтобы поля удовлетворяли еще каким-либо уравнениям.

3. Дипольно волновая теория дифракции

Математически корректным и физически обоснованным обобщением метода Кирхгофа на векторную теорию дифракции представляется подход, базирующийся на использовании в методе Кирхгофа не поля, а поляризованного потенциала или вектора Герца \mathbf{Z} [12]. Такой подход используется, например, в теории антенн.

Поскольку найденные по формулам (6) поля автоматически удовлетворяют уравнению Максвелла $\text{div} \mathbf{E} = 0$ [5], внутреннее противоречие, свойственное обычному методу Кирхгофа, при данном подходе отсутствует.

Выражения для электромагнитного поля излучающего диполя $\mathbf{p} = \mathbf{p}_0 \exp(-i\omega t)$ получается из решения волнового уравнения с источником в виде диполя [12]:

$$\mathbf{Z} = \mathbf{p}_0 \frac{\exp(-i\omega t + ikr)}{r}, \quad (8)$$

Поляризованный потенциал дипольной волны параллелен \mathbf{p}_0 и переносится сферической волной, рис. 1. Одно из двух скалярных волновых уравнений, используемых в методе Кирхгофа, неоднородное уравнение для функции Грина, будучи записано для Z приобретает

вполне точную физическую интерпретацию. Оно описывает поле излучения реального точечного источника электромагнитного излучения. Подстановкой (8) в (6), получим дипольную волну, рис. 1:

$$E_r = 2 \cos \theta \left(\frac{1}{r^2} - \frac{ik}{r} \right) Z, \quad E_\theta = \sin \theta \left(\frac{1}{r^2} - \frac{ik}{r} - k^2 \right) Z, \quad H_\phi = ik \sin \theta \left(ik - \frac{1}{r} \right) Z,$$

где $Z = |\mathbf{p}_0| \frac{\exp(-i\omega t + ikr)}{r}$. В волновой зоне ($kr \gg 1$): $E_r = 0$, $E_\theta = H_\phi = -k^2 Z \sin \theta$.

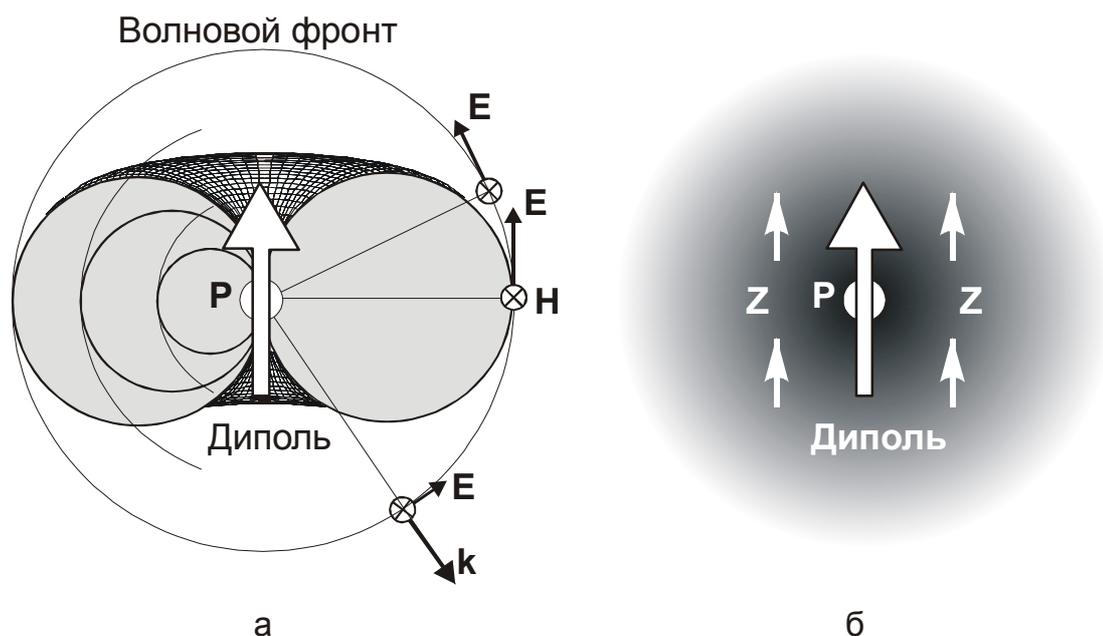


Рис.1. Распределение электрического и магнитного полей (а) и вектора Герца (б) излучающего диполя.

Учитывая, что поляризационный потенциал дипольной волны сохраняет свое направление в различных точках пространства, при падении на апертуру линейно поляризованного излучения можно воспользоваться скалярными уравнениями, примененными к Z . При этом скалярный интеграл Кирхгофа, записанный для Z содержит векторную информацию о поле дифракционной картины.

Это дает возможность без каких-либо приближений, связанных с неоднородностью векторной функции, выписать интеграл для Z , а выражения для векторных полей \mathbf{E} и \mathbf{H} получить простым дифференцированием. Этот подход естественным образом обобщается и на общий случай с произвольным распределением направления поля на апертуре.

Основой для решения векторной задачи дифракции при линейной поляризации падающего излучения является интеграл Кирхгофа, записанный для вектора Герца:

$$Z(\mathbf{r}) = \int_{S'} [G(\mathbf{n} \nabla) Z_0 - Z_0(\mathbf{n} \nabla G)] dS'. \quad (9)$$

Здесь $Z_0(\mathbf{r}')$ - распределение вектора Герца на заданной поверхности S' , $Z(\mathbf{r})$ – вектор Герца в точке наблюдения, \mathbf{n} - единичная нормаль к поверхности заданного поля на апертуре, $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ – функция Грина скалярного волнового уравнения.

Рассмотрим очень важный и широко распространенный случай - дифракцию плоской, линейно поляризованной волны на апертуре. В этом случае $Z_0(\mathbf{r}')$ и $E_0(\mathbf{r}')$ на поверхности S' связаны простым соотношением $E_0(\mathbf{r}') = -k^2 Z_0(\mathbf{r}')$. Учитывая это, (9) может быть представлено в виде:

$$\mathbf{Z}(\mathbf{r}) = -\mathbf{e}_0 \frac{1}{k^2} \int_{S'} \left[G \frac{d}{dn} E_0 - E_0 \frac{d}{dn} G \right] dS' \quad (10)$$

где \mathbf{e}_0 -единичный вектор в направлении поля, а d/dn - производная по направлению \mathbf{n} , $d/dn = \mathbf{n}\nabla$.

Технология вычисления поля дифракции теперь сводится к вычислению интеграла в выражении (10), записи \mathbf{Z} в векторном виде с тем же единичным вектором, что и поле E_0 , и, наконец, вычислению самого поля по формулам (6). Полученное решение для плоской падающей волны (10) позволяет решить задачу и в общем случае.

Возвращаясь к вопросу о скаляризации векторных электродинамических уравнений [14] можно заключить, что рассмотренная методика решения задачи дифракции является еще одним “физическим” методом скаляризации. В общем случае трехмерного векторного поля необходимо решать векторную задачу дифракции для линейно поляризованного излучения по каждой из компонент. Как было показано выше эта задача сводится к скалярному интегралу при применении вектора Герца. Эти решения удовлетворяют уравнениям Максвелла, поэтому поля дифракции от каждой из компонент можно векторно сложить.

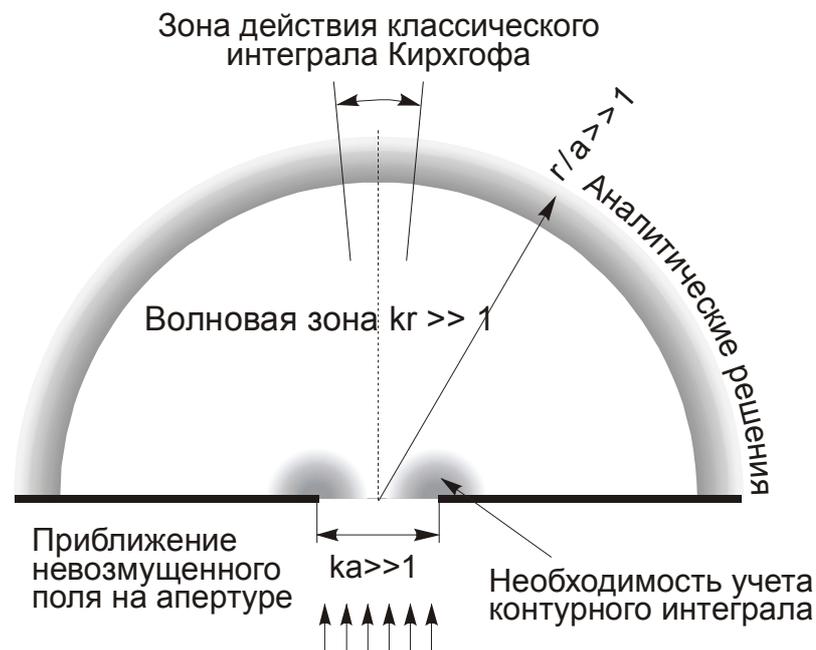


Рис.2. Схематическое представление принятых приближений и зон справедливости решений для классического метода Кирхгофа и дипольно-волновой теории дифракции.

Обсудим ограничения применимости данного метода, рис. 2. В качестве заданного поля на апертуре используется поле, невозмущенное краями. Это приводит к «физическому» ограничению на характерный размер отверстия $a \gg \lambda$. Обычными математическими ограничениями при вычислении дифракционных интегралов являются: волновая зона $kr \gg 1$ и , условие на размер отверстия $ka \gg 1$, более слабое, по сравнению с рассмотренным в предыдущем предложении. Здесь k - волновой вектор, a - характерный размер апертуры, r - расстояние от края апертуры до точки наблюдения. Во всех, приведенных ниже задачах, в отношении r принято более жесткое приближение $r \gg a$, позволяющее получить аналитические зависимости. Суммируя ограничения на r и a можно записать, что в наших расчетах $r \gg a \gg \lambda$.

Ключевым моментом, в значительной степени определяющим возможность практического применения данного метода, является преобразование начального распределения поля на отверстии в начальное распределение вектора Герца. Общий подход, пригодный для любого заданного распределения поля вряд ли возможен. Ниже решены задачи, рассматривающие некоторые частные случаи: плоскую линейно поляризованную волну, радиально и азимутально поляризованное излучение. Можно указать также и на более общий случай, когда начальное поле линейно поляризовано, а распределение амплитуды поля таково, что везде $\nabla E_0 \perp E_0$. В этом случае можно применить разложение амплитуды поля на апертуре на плоские волны, причем скалярным компонентам разложения может быть приписано направление поля, совпадающее с E_0 . Общее решение задачи получается интегрированием по волновому вектору решения, полученного для плоской волны.

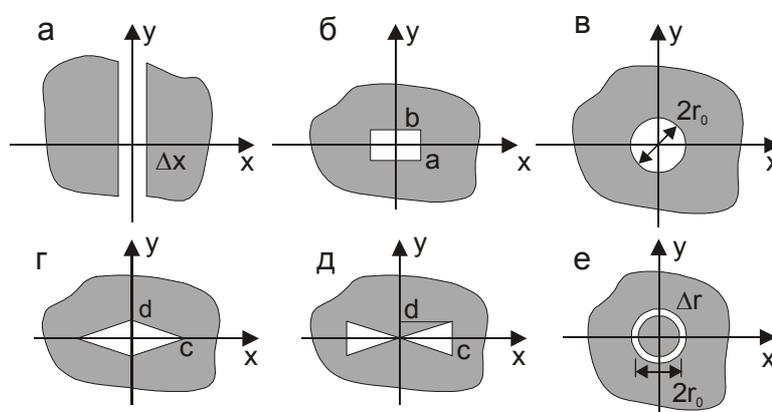


Рис.3. Рассмотренные случаи дифракции: на бесконечной щели и на отверстиях различной формы.

В разделе 11 рассмотрен также способ решения дифракционных задач от нескольких отверстий, использующий аддитивность математических преобразований, заложенных в представленном методе.

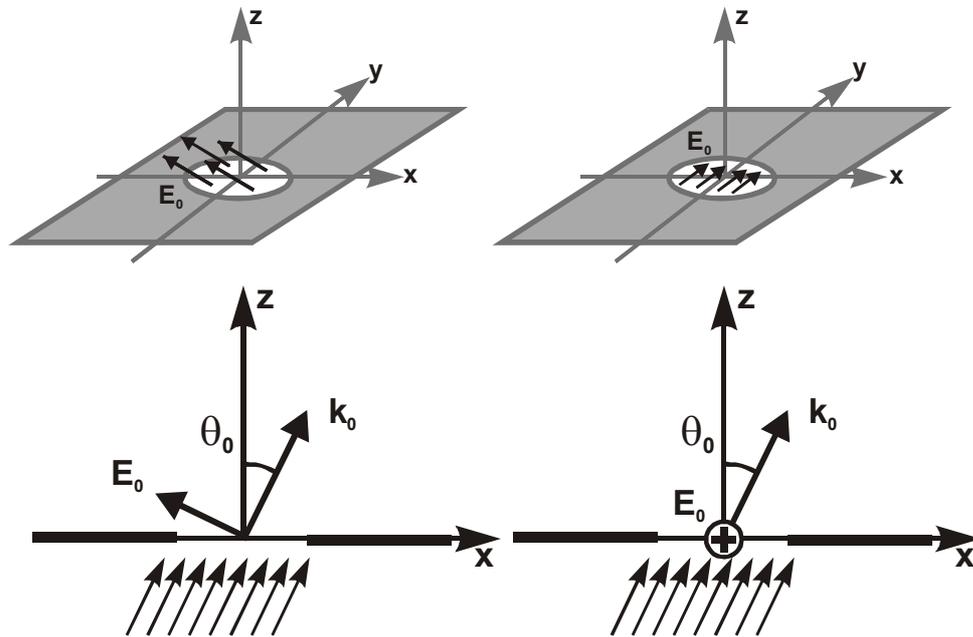


Рис.4. Два возможных направления поля на апертуре при ненулевом угле падения излучения. а) вектор поля перпендикулярен плоскости падения, б) вектор поля в плоскости падения.

Рассмотрим несколько примеров, иллюстрирующих применение предложенного метода. На рис. 3 показаны схемы рассмотренных случаев с некоторыми обозначениями. Во всех случаях поверхность, покрывающая апертуру S' , принята плоской, вектор \mathbf{n} в формулах (9) и (10) направлен вдоль оси z . Во всех случаях плоскость x - z является плоскостью падения излучения. При дифракции на щели и отверстиях разной формы рассмотрены два возможных направления поля, рис. 4: в плоскости падения излучения (а) и перпендикулярно ей (б). На их основе может быть построено решение для любого направления поля.

Учитывая принципиальную важность изложенного материала в приложении 4 проведено прямое сравнение ограничений и физических приближений, положенных в основу классического подхода и дипольно-волновой теории дифракции.

4. Дифракция излучения на бесконечной щели.

Рассмотрим плоскую линейно поляризованную волну, падающую на щель (рис. 4) в плоскости x - z под углом θ_0 к оси z :

$$\mathbf{E}_0 = \mathbf{e}_0 E_0 \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r}) = \mathbf{e}_0 E_0 \exp[i(k_x x + k_z z)] = \mathbf{e}_0 E_0 \exp(ikx' \sin \theta_0) \exp(ikz' \cos \theta_0).$$

Временной множитель $\exp(-i\omega t)$ для краткости опускаем, \mathbf{e}_0 - единичный вектор в

направлении поля.

Вектор \mathbf{Z} (10), имеет одинаковое направление во всех точках, совпадающее с направлением \mathbf{E}_0 . Взятие скалярного интеграла (10) является стандартной процедурой. В нашем случае, подставив \mathbf{E}_0 и G его можно записать в виде:

$$\mathbf{Z}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{k^2} \mathbf{E}_0 \int_S \exp(ikx' \sin \theta_0) \left[G \frac{\partial}{\partial z'} \exp(ikz' \cos \theta_0) - (\exp(ikz' \cos \theta_0)) \frac{\partial}{\partial z'} G \right] dS'$$

В рассматриваемом здесь двумерном случае функция Грина выражается функцией Ханкеля нулевого порядка первого рода [5], стр.108. На больших расстояниях от апертуры мы можем использовать асимптотическое приближение функции Ханкеля, имеющее вид:

$$G(k|\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}'|) \approx \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \exp^{-i\pi/4} \frac{\exp(ik|\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}'|)}{\sqrt{k|\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}'|}}$$

$|\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}'| = \sqrt{(x - x')^2 + (z - z')^2}$, где ρ - радиус вектор в точку рассмотрения. Выполнив дифференцирование под интегралом, и положив $z'=0$ получим:

$$G \frac{\partial}{\partial z'} \exp(ikz' \cos \theta_0) = ik \cos \theta_0 G ; \quad (\exp(ikz' \cos \theta_0)) \frac{\partial}{\partial z'} G = - \left(ik - \frac{1}{2} \frac{1}{|\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}'|} \right) \frac{z}{|\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}'|} G .$$

Здесь $|\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}'| = \sqrt{(x - x')^2 + z^2}$. В волновой зоне $k \cdot \rho \gg 1$ интеграл приобретает вид:

$$\mathbf{Z} = -i\mathbf{E}_0 \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \exp^{-i\pi/4} \int_{-\Delta x}^{\Delta x} e^{ikx' \sin \theta_0} \frac{\exp(ik|\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}'|)}{\sqrt{k|\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}'|}} \left(\cos \theta_0 + \frac{z}{|\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}'|} \right) dx' , \quad (11)$$

Δx - полуширина щели. Рассмотрим случай $\Delta x \ll \rho$. Это означает, что и $x' \ll \rho$ и можно применить приближенные формулы:

$$|\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}'| = \sqrt{(x - x')^2 + z^2} \approx \rho(1 - u); \quad \frac{1}{\sqrt{k|\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}'|}} \approx \frac{1 + 0.5u u'}{\sqrt{k\rho}} ; \quad \frac{1}{(\sqrt{k|\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}'|})^3} \approx \frac{1 + 1.5u u'}{(\sqrt{k\rho})^3} ;$$

$$u = \frac{x \cdot x'}{x^2 + z^2} = \frac{x \cdot x'}{\rho^2} .$$

Подставляя эти формулы в (11) и отбрасывая слагаемые, малые по порядку величины приходим к выражению:

$$\mathbf{Z} = ik \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \exp^{-i\pi/4} \frac{\mathbf{E}_0}{k^2} \frac{\rho^2}{x} \cdot \frac{e^{ik\rho}}{\sqrt{k\rho}} \cdot \left(\cos \theta_0 + \frac{z}{\rho} \right) \cdot \int_{\frac{x-\Delta x}{\rho^2}}^{\frac{x+\Delta x}{\rho^2}} e^{ik \left(\frac{\rho^2}{x} \sin \theta_0 - \rho \right) u} \cdot du \quad (12)$$

Произведя замену $z/\rho = \cos \theta$ и $x/\rho = \sin \theta$ после взятия интеграла получаем:

$$\bar{Z} = -i \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \exp^{-i\pi/4} \bar{S} \frac{e^{i\bar{\rho}}}{\sqrt{\bar{\rho}}} (\cos \theta_0 + \cos \theta) \frac{\sin \chi}{\chi}; \quad \chi = \bar{\Delta x} (\sin \theta - \sin \theta_0) \quad (13)$$

Здесь мы перешли в координаты ρ и θ . Угол θ отсчитывается от оси z , $\sin\theta=x/\rho$, $\cos\theta=z/\rho$. Введены также безразмерные параметры:

$$\bar{Z} = Z \frac{k^2}{E_0}; \quad \bar{S} = 2k\Delta x; \quad \bar{\Delta x} = k\Delta x; \quad \bar{\rho} = k\rho.$$

Это приближение существенно отличается от приближения Кирхгофа, поскольку не накладывает ограничения применимости по углу и содержит информацию о направлении поля в различных точках в зависимости от направления начального поля. Выражение (13) получено из скалярного интеграла и справедливо для любого направления начального поля. Однако, выражения для полей дифракции, разумеется, будут разными, в зависимости от направления начального поля, а значит и Z .

Если поле \mathbf{E}_0 направлено перпендикулярно плоскости падения ($\mathbf{E}_0 \parallel y$) в векторном виде имеем: $\mathbf{Z}=Z(x,z)\cdot\mathbf{j}$. Вычисление поля по формуле (6) производилось в декартовой системе координат. Напомним общую формулу взятия ротора:

$$\mathbf{rot} \mathbf{Z} = \left(\frac{\partial Z_z}{\partial y} - \frac{\partial Z_y}{\partial z} \right) \cdot \mathbf{i} + \left(\frac{\partial Z_x}{\partial z} - \frac{\partial Z_z}{\partial x} \right) \cdot \mathbf{j} + \left(\frac{\partial Z_y}{\partial x} - \frac{\partial Z_x}{\partial y} \right) \cdot \mathbf{k};$$

Учитывая, что в нашем случае $\mathbf{Z}=Z(x,z)\cdot\mathbf{j}$, формулы для нахождения магнитного и электрического полей (6) сильно упрощаются:

$$\mathbf{H} = ik \mathbf{rot} \mathbf{Z} - \frac{\partial Z_y}{\partial z} \mathbf{i} + \frac{\partial Z_y}{\partial x} \mathbf{k}; \quad \mathbf{E} = - \left(\frac{\partial^2 Z_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 Z_y}{\partial x^2} \right) \mathbf{j}$$

Процедура взятия производных также не сложна, если учесть порядок малости производных, взятых от сомножителей в формуле (13). Максимальной по порядку величины является производная по координате от экспоненты из-за сомножителя $k = 2\pi/\lambda$. Такой же сомножитель появляется и в производной от χ , но здесь есть еще и малый по порядку величины коэффициент, $\Delta x/\rho$. Поэтому, например, вторые производные по координатам от Z , необходимые при вычислении \mathbf{E} выглядят довольно просто:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} Z = -k^2 \cdot \frac{x^2}{\rho^2} \cdot Z, \quad \frac{\partial^2}{\partial x \cdot \partial z} Z = -k^2 \cdot \frac{x \cdot z}{\rho^2} \cdot Z, \quad \frac{\partial^2}{\partial z^2} Z = -k^2 \cdot \frac{z^2}{\rho^2} \cdot Z.$$

Тогда $\mathbf{E} = \left(k^2 \cdot \frac{x^2}{\rho^2} + k^2 \cdot \frac{z^2}{\rho^2} \right) Z \mathbf{j} = k^2 Z \mathbf{j}$. Учитывая (13) перепишем формулу для \mathbf{E} в окончательном виде:

$$\mathbf{E} = Z \mathbf{j} = -i \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \exp^{-i\pi/4} E_0 \bar{S} \frac{e^{i\bar{\rho}}}{\sqrt{\bar{\rho}}} (\cos \theta_0 + \cos \theta) \frac{\sin \chi}{\chi} \mathbf{j} ; \quad (14)$$

$$\chi = \bar{\Delta x} (\sin \theta - \sin \theta_0), \quad \bar{S} = 2k\Delta x; \quad \bar{\Delta x} = k\Delta x; \quad \bar{\rho} = k\rho$$

Выражение (14) совпадает с формулой, получаемой из обычного скалярного интеграла Кирхгофа и это вполне объяснимо. Только в этом исключительном случае решение по обычной методике удовлетворяет уравнению $\text{div} \mathbf{E} = 0$, поскольку поле дифракции везде направлено так же, как и начальное поле, вдоль по y , т.е. имеет лишь одну компоненту и эта компонента не зависит от y в силу двумерности задачи.

Соответственно, для поля \mathbf{E}_0 , лежащего в плоскости падения ($\mathbf{E}_0 \perp y$), поляризионный потенциал имеет вид: $Z = Z(x, z) \cdot (\mathbf{i} \cos \theta_0 - \mathbf{k} \sin \theta_0)$, а вычисления по формуле (6) дают выражение для электрического поля $\mathbf{E} = E_0 \cos(\theta - \theta_0) \bar{Z} \mathbf{e}_\theta$. Или окончательно:

$$\mathbf{E} = Z \cos(\theta - \theta_0) \mathbf{e}_\theta = -i \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \exp^{-i\pi/4} E_0 \bar{S} \frac{e^{i\bar{\rho}}}{\sqrt{\bar{\rho}}} (\cos \theta_0 + \cos \theta) \cos(\theta - \theta_0) \frac{\sin \chi}{\chi} \mathbf{e}_\theta ; \quad (15)$$

$$\chi = \bar{\Delta x} (\sin \theta - \sin \theta_0), \quad \bar{S} = 2k\Delta x; \quad \bar{\Delta x} = k\Delta x; \quad \bar{\rho} = k\rho; \quad \mathbf{e}_\theta = \mathbf{i} \cos \theta - \mathbf{j} \sin \theta$$

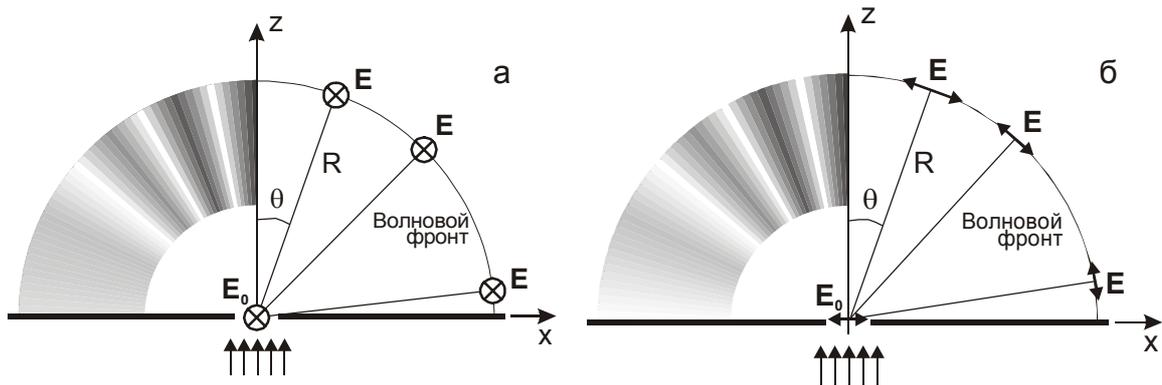


Рис.5. Схема, условные обозначения и синтезированная на основе расчетов картина дифракции линейно поляризованного света на бесконечной щели. На (а) и (б) показано направление поля дифракции при разном направлении поля на щели.

Направление поля дифракции, определяемого формулами (14) и (15) проиллюстрировано на рис. 5. В любом случае формулы дают правильное направление вектора поля, перпендикулярное волновому вектору и некоторое различие в амплитуде поля для двух рассмотренных поляризаций луча. При рассмотрении дифракции на щели, прорезанной в непрозрачном экране, формально мы не можем придавать большое значение качественным различиям в дифракционной картине при больших углах, где $\cos(\theta - \theta_0) = 0$. Как уже отмечалось выше, приближение невозмущенного поля на апертуре ограничивает размер отверстия снизу, по крайней мере, несколькими длинами волн. При этом интенсивность дифракционной картины резко спадает при увеличении полярного угла. и при больших углах

- поле практически равно нулю при любой поляризации. Однако, если рассматривать щель как элемент неограниченного никаким экраном волнового фронта, то требование на размер щели можно снять. В этом случае отпадает также необходимость учета краевых условий при рассмотрении поля дифракции «вдоль экрана» в виду его отсутствия. Общая картина распространения волны, имеющей заданное распределение при $z=0$, будет получена в результате векторной суперпозиции полей дифракции от отдельных участков фронта, получаемых суммированием или интегрированием соответствующих выражений. Качественные особенности дифракции для разных поляризаций в этом случае могут оказаться существенными.

Распределения амплитуды поля, рассчитанные по формулам (14) и (15) при нулевом угле падения и малом размере щели представлены на рис. 6. Хорошо видна качественная особенность полученных результатов. В случае, когда $E_0 \perp y$ поле дифракции при $\theta=\pi/2$, то есть вдоль экрана, равно нулю при любой ширине щели. Излучение в направлении начального поля отсутствует. Если же $E_0 \parallel y$, ситуация иная. Амплитуда поля дифракции при $\theta=\pi/2$, зависит от ширины щели и может быть как равным нулю, так и отличным от нуля.

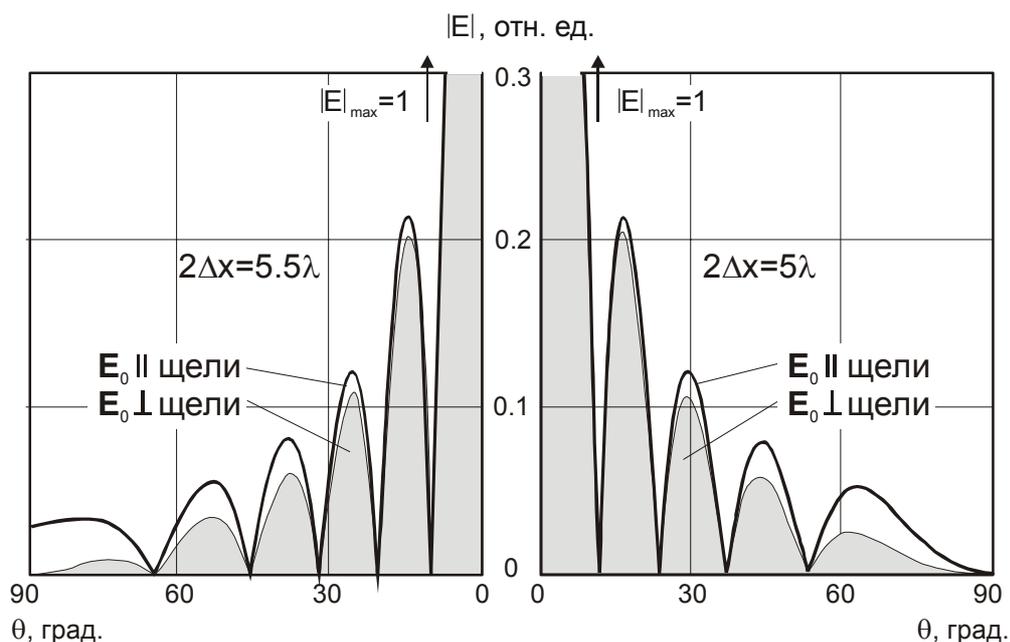


Рис.6. Дифракция линейно поляризованного поля на бесконечной щели при двух направлениях поляризации относительно щели и разной ширине щели. Угол падения равен нулю.

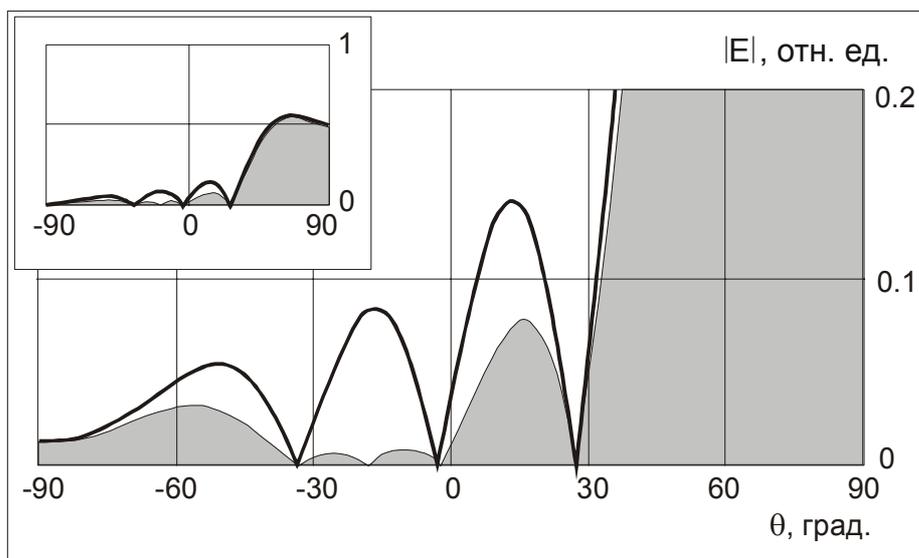


Рис.7. Дифракция линейно поляризованного поля на бесконечной щели при двух направлениях поляризации относительно щели и ширине щели $2\Delta x=2\lambda$. Угол падения 72° .

На рис. 7 приведены результаты расчетов для угла падения 72° . Характерной особенностью случая $\mathbf{E}_0 \perp u$ является наличие дополнительной точки нулевого поля при $\theta = \theta_0 - \pi/2$, формула (15). “Полнос” находится вдоль направления поля. Эти различия можно увидеть и при дифракции на щели большего размера, рис. 8.

При $\theta_0=0$ и $\theta \rightarrow 0$ формулы (14) и (15) переходят в классические.

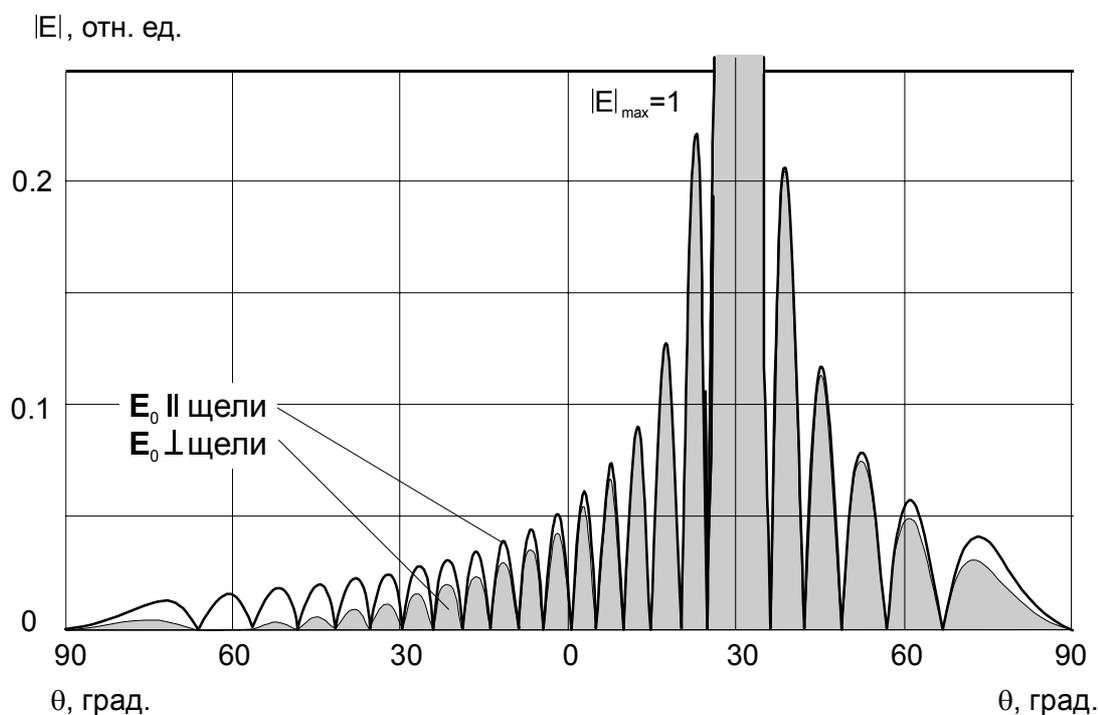


Рис.8. Дифракция линейно поляризованного поля на бесконечной щели при двух направлениях поляризации относительно щели и ширине щели $2\Delta x=12\lambda$. Угол падения 30° .

На основе полученных выражений (14) и (15) может быть записана уточненная формула для простейшей дифракционной решетки, образованной параллельными щелями, прорезанными в непрозрачном экране. Известно, что формула для прошедшего через такую решетку поля содержит два сомножителя: член, описывающего дифракцию на одной щели и выражение, связанное с коллективным эффектом дифракции на многих щелях. Теперь формулы для такой решетки учитывают поляризацию излучения.

Если имеется некоторое распределение амплитуды заданного поля, то, для вычисления дифракционной картины, можно воспользоваться функцией Грина, решением для бесконечно малой ширины щели. Вернемся к интегралу (12). Представив поле на щели в виде: $E_0 = E_0 \cdot \delta(x' - x_0)$ приходим к следующему выражению:

$$GZ = -ik \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \exp^{-i\pi/4} \frac{E_0}{k^2} \cdot \frac{e^{ik\rho}}{\sqrt{k\rho}} \cdot \left(\cos \theta_0 + \frac{z}{\rho} \right) \cdot \int \delta(x' - x_0) e^{ik \left(\sin \theta_0 - \frac{x}{\rho} \right) x'} \cdot dx'$$

$$GZ = -ik \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \exp^{-i\pi/4} \frac{E_0}{k^2} \cdot \frac{e^{ik\rho}}{\sqrt{k\rho}} \cdot \left(\cos \theta_0 + \frac{z}{\rho} \right) \cdot e^{ik \left(\sin \theta_0 - \frac{x}{\rho} \right) x_0}$$

Описанная выше процедура вычисления поля GE по заданному вектору Герца GZ дает два выражения: для компоненты, направленной по оси y GE_y (от вектора заданного поля параллельного оси y) и для компоненты вдоль волнового фронта GE_θ (от вектора заданного поля, перпендикулярного оси y).

$$GE_y = -ik E_{0y} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \exp^{-i\pi/4} \cdot \frac{e^{ik\rho}}{\sqrt{k\rho}} \cdot (\cos \theta_0 + \cos \theta) \cdot e^{ik(\sin \theta_0 - \sin \theta)x_0} \quad (16)$$

$$GE_\theta = -ik E_{0x-z} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \exp^{-i\pi/4} \cdot \frac{e^{ik\rho}}{\sqrt{k\rho}} \cdot (\cos \theta_0 + \cos \theta) \cdot \cos(\theta_0 - \theta) e^{ik(\sin \theta_0 - \sin \theta)x_0} \quad (17)$$

При произвольном распределении заданного поля $E_0 = E_{0x} \cdot \mathbf{i} + E_{0y} \cdot \mathbf{j} + E_{0z} \cdot \mathbf{k}$ его надо разложить на две составляющие $E_{0x-z} = E_{0x} \cdot \mathbf{i} + E_{0z} \cdot \mathbf{k}$ и $E_{0y} = E_{0y} \cdot \mathbf{j}$. Используя выражения (16) и (17) общее решение задачи можно записать в виде:

$$\mathbf{E} = -ik \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \exp^{-i\pi/4} \cdot \frac{e^{ik\rho}}{\sqrt{k\rho}} \cdot (\cos \theta_0 + \cos \theta) \cdot \left[\mathbf{e}_\theta \cos(\theta_0 - \theta) \int_{x_1}^{x_2} E_{0x-z}(x_0) e^{ik(\sin \theta_0 - \sin \theta)x_0} dx_0 + \mathbf{e}_y \int_{x_1}^{x_2} E_{0y}(x_0) e^{ik(\sin \theta_0 - \sin \theta)x_0} dx_0 \right] \quad (18)$$

Надо иметь в виду, что заданное поле в общем случае должно рассматриваться как двумерное. Есть только две независимые компоненты разложения поля при косом падении: параллельная плоскости падения и перпендикулярная ее. Компонента, направленная вдоль волнового вектора отсутствует. Компонента заданного поля вдоль оси y E_{0y} дает и компоненту решения, направленную вдоль оси y - E_y .

Компонента заданного поля поперек оси y может формально разлагаться на x - и z -компоненты, но они связаны между собой через угол падения $E_{0x}/E_{0z} = \text{ctg}\theta_0$. Поэтому в решении использована компонента заданного поля E_{0x-z} , определяющая компоненту поля дифракции, направленную вдоль волнового фронта - E_θ .

Рассмотрим пример: $\theta_0=0$; $E_{0y}=0$; $E_{0x-z}=E_0 \cos(\pi x_0/2a)$. Заданное поле отлично от нуля при $-a < x_0 < +a$. Несложные вычисления интеграла (18) дают следующую формулу для поля дифракции в этом случае:

$$E = -ikaE_0 \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{\pi^3}} \exp^{-i\pi/4} \cdot \frac{e^{ik\rho}}{\sqrt{k\rho}} \cdot (1 + \cos\theta) e_0 \cos(\theta) \frac{\cos(ka \sin\theta)}{1 - 16 \frac{a^2}{\lambda^2} \sin^2\theta}$$

5. Дифракция линейно поляризованного излучения на отверстии произвольной формы.

Исходный интеграл для вычисления Z в этом случае аналогичен (11), однако записан для трехмерной задачи:

$$Z = -iE_0 \int_{S'} e^{ikx' \sin\theta_0} \frac{\exp(ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)}{k|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \left(\cos\theta_0 + \frac{z}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \right) \cdot dS'.$$

Функция Грина в этом случае имеет вид $G = \frac{\exp(ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)}{k|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$. Формулы приближенных

вычислений через u аналогичны приведенным выше разложениям при замене ρ на r , однако формула для u имеет другой вид, поскольку интегрирование проводится теперь по двум координатам:

$$u = \frac{x \cdot x' + y \cdot y'}{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{x \cdot x' + y \cdot y'}{r^2} = u_x + u_y.$$

В результате мы приходим к интегралу:

$$Z = -\frac{i}{k} E_0 (\cos\theta_0 + \cos\theta) \frac{e^{ikr}}{r} I(\varphi, \theta); \quad (19)$$

$$I(\varphi, \theta) = \int_{S'} e^{ikx' \sin\theta_0} e^{-ikru} \cdot dS'$$

При взятии интеграла в декартовой системе координат нужно записать:

$$u = \sin\theta \cos\varphi \frac{x'}{r} + \sin\theta \sin\varphi \frac{y'}{r}$$

интеграл приобретает вид:

$$I(\varphi, \theta) = \iint_{S'} \exp\{ik(\sin\theta_0 - \sin\theta \cos\varphi)x'\} \exp\{-ik \sin\theta \sin\varphi y'\} dx' dy' \quad (20)$$

При взятии интеграла в полярной системе координат нужно применить замену:

$$u = \frac{\rho'}{r} \sin \theta (\cos \varphi \cos \varphi' + \sin \varphi \sin \varphi') = \frac{\rho'}{r} \sin \theta \cos(\varphi - \varphi'); \quad x' = \rho' \cos \varphi'$$

Тогда получим следующее выражение для интеграла:

$$I(\varphi, \theta) = \iint_S \exp\{ik\rho' [\sin \theta_0 \cos \varphi' - \sin \theta \cos \varphi \cos \varphi' - \sin \theta \sin \varphi \sin \varphi']\} d\rho' d\varphi' \quad (21)$$

Таким образом, вектор Герца определяется формулой (19), с интегралом вида (20) или (21). Напомним, что направление вектора Герца совпадает с направлением поля на отверстии.

При вычислении поля по формулам (6) рассмотрим два основных направления поля, падающего на апертуру: в плоскости падения и перпендикулярно ей. Здесь, также как и в случае со щелью, процедура взятия производных при вычислении ротора не сложна, если учесть порядок малости производных, взятых от сомножителей в формуле (19). Максимальной по порядку величины является производная по координате от экспоненты, поэтому вычисление ротора можно производить независимо от взятия интеграла. И в этом трехмерном случае можно пользоваться простыми формулами:

$$\frac{\partial}{\partial x} Z = -ik \frac{x}{r} Z, \quad \frac{\partial}{\partial y} Z = -ik \frac{y}{r} Z, \quad \frac{\partial}{\partial z} Z = -ik \frac{z}{r} Z.$$

Окончательно поле можно представить в виде:

$$\mathbf{E} = -iE_0 \frac{e^{i\bar{r}}}{r} (\cos \theta_0 + \cos \theta) I(\varphi, \theta) \cdot \mathbf{q}(\varphi, \theta) \quad (22)$$

где $\bar{r} = kr$, $I(\varphi, \theta)$ вычисляется по формулам (20) или (21) и определяется формой отверстия, а вид векторной функции $\mathbf{q}(\varphi, \theta)$ зависит от направления поля на отверстии, см. таблицу.

Поле \mathbf{E}_0	Вектор \mathbf{Z}	Вектор $\mathbf{q}(\varphi, \theta)$
$\mathbf{E}_0 \parallel y$	$\mathbf{Z} = Z \cdot \mathbf{e}_y$	$\mathbf{e}_\theta \cos \theta \sin \varphi + \mathbf{e}_\varphi \cos \varphi$
$\mathbf{E}_0 \perp y$	$\mathbf{Z} = Z \cdot (\mathbf{e}_x \cos \theta_0 - \mathbf{e}_z \sin \theta_0)$	$\mathbf{e}_\theta (\sin \theta \sin \theta_0 + \cos \theta \cos \varphi \cos \theta_0) - \mathbf{e}_\varphi \sin \varphi \cos \theta_0$

Решение для любого направления вектора поля на апертуре может быть получено как результат векторного сложения решений для $\mathbf{E}_0 \parallel y$ и $\mathbf{E}_0 \perp y$.

6. Дифракция линейно поляризованного излучения на прямоугольном отверстии.

В случае прямоугольного отверстия, рис. 3б интеграл (20) принимает вид:

$$I(\theta, \varphi) = \int_{-a}^a \exp\{ik(\sin \theta_0 - \sin \theta \cos \varphi)x'\} dx' \int_{-b}^b \exp\{-ik \sin \theta \sin \varphi y'\} dy'$$

а поле вычисляется по формуле:

$$\mathbf{E} = -iE_0 \bar{S} \frac{e^{i\bar{r}}}{r} (\cos \theta_0 + \cos \theta) \frac{\sin \chi_a}{\chi_a} \frac{\sin \chi_b}{\chi_b} \cdot \mathbf{q}(\varphi, \theta); \quad (23)$$

$$\chi_a = \bar{a} (\sin \theta \cos \varphi - \sin \theta_0); \quad \chi_b = \bar{b} \sin \theta \sin \varphi; \quad \bar{S}_0 = 4 \bar{a} \bar{b}; \quad \bar{a} = ka; \quad \bar{b} = kb; \quad \bar{r} = kr$$

Вектор $\mathbf{q}(\varphi, \theta)$ приведен в таблице для двух направлений начального поля, или вычисляется путем векторного сложения компонент при любом другом.

7. Дифракция линейно поляризованного излучения на отверстии в виде ромба.

Форма, расположение отверстия и его размеры показаны на рис. 3г. Границы ромба определяются формулами: $y = \pm m(x + c) = \pm (mx + mc)$, $mc = d$. Введя обозначения

$$\alpha = ka(\sin \theta_0 - \sin \theta \cos \varphi); \quad \text{и} \quad X = \frac{x'}{c}; \quad Y = \frac{y'}{d}$$

$$\beta = ka m \sin \theta \sin \varphi$$

интеграл (20) преобразуется к виду:

$$I(\theta, \varphi) = \int_{-1}^0 e^{i\alpha X} \int_{-(X+1)}^{X+1} e^{-i\beta Y} dX dY + \int_0^1 e^{i\alpha X} \int_{X-1}^{-(X-1)} e^{-i\beta Y} dX dY$$

Получаем следующее выражение для поля:

$$\mathbf{E} = -iE_0 \bar{S} \frac{e^{i\bar{r}}}{r} (\cos \theta_0 + \cos \theta) \left\{ \frac{\sin \frac{\alpha + \beta}{2}}{\frac{\alpha + \beta}{2}} \frac{\sin \frac{\alpha - \beta}{2}}{\frac{\alpha - \beta}{2}} \right\} \mathbf{q}(\varphi, \theta) \quad (24)$$

$$\alpha = kc(\sin \theta_0 - \sin \theta \cos \varphi); \quad \beta = kd \sin \theta \sin \varphi; \quad \bar{S} = 2k^2 cd$$

Формулы для вектора $\mathbf{q}(\varphi, \theta)$ приведены в таблице.

8. Дифракция линейно поляризованного излучения на отверстии в виде двойного треугольника.

Форма, расположение отверстия и его размеры показаны на рис. 3д. Границы отверстий определяются формулами: $y = \pm m(x + c) = \pm (mx + mc)$, $mc = d$. Введя обозначения

$$\alpha = ka(\sin \theta_0 - \sin \theta \cos \varphi); \quad \text{и} \quad X = \frac{x'}{c}; \quad Y = \frac{y'}{d}$$

$$\beta = ka m \sin \theta \sin \varphi$$

интеграл (20) преобразуется к виду:

$$I(\theta, \varphi) = \int_{-1}^0 e^{i\alpha X} \int_X^{-X} e^{-i\beta Y} dX dY + \int_0^1 e^{i\alpha X} \int_{-X}^X e^{-i\beta Y} dX dY$$

Обычные преобразования приводят к следующей формуле для поля дифракции.

$$\mathbf{E} = -iE_0 \bar{S} \frac{e^{i\bar{r}}}{\bar{r}} (\cos \theta_0 + \cos \theta) \frac{1}{\beta} \left\{ \left[\frac{1 - \cos(\alpha + \beta)}{\alpha + \beta} \right] - \left[\frac{1 - \cos(\alpha - \beta)}{\alpha - \beta} \right] \right\} \mathbf{q}(\varphi, \theta) \quad (25)$$

$$\alpha = kc(\sin \theta_0 - \sin \theta \cos \varphi); \quad \beta = kd \sin \theta \sin \varphi; \quad \bar{S} = 2k^2 cd$$

9. Дифракция линейно поляризованного излучения на круглом отверстии.

В данном случае (см. рис. 3в) стартуем от интеграла (21). Приходим к двойному интегралу:

$$I(\varphi, \theta) = \int_0^{r_0} \int_0^{2\pi} \exp\{ikr'(\sin \theta_0 \cos \varphi' - \sin \theta \cos(\varphi - \varphi'))\} r' d\varphi' dr', \quad (26)$$

Круглую скобку в подинтегральном выражении представим в виде: $M \cos(\phi + \varphi')$; где

$$M = \sqrt{(\sin \theta_0 - \sin \theta \cos \varphi)^2 + (\sin \theta \sin \varphi)^2};$$

$$\cos \phi = \frac{\sin \theta_0 - \sin \theta \cos \varphi}{M}; \quad \sin \phi = \frac{\sin \theta \sin \varphi}{M}$$

Далее процедура вычислений традиционна. Получаем следующие выражения для вектора Герца Z и электрического поля \mathbf{E} :

$$\mathbf{E} = -2 i E_0 \bar{S} \frac{e^{i\bar{r}}}{\bar{r}} (\cos \theta_0 + \cos \theta) \frac{J_1(\bar{r}_0 M)}{\bar{r}_0 M} \cdot \mathbf{q}(\varphi, \theta); \quad (27)$$

$$M = \sqrt{(\sin \theta_0 - \sin \theta \cos \varphi)^2 + (\sin \theta \sin \varphi)^2}; \quad \bar{S}_0 = \pi \bar{r}_0^2; \quad \bar{r} = k r; \quad \bar{r}_0 = k r_0$$

Вид векторной функции $\mathbf{q}(\varphi, \theta)$ тот же, что и для прямоугольного отверстия и определяется формулами, приведенными в таблице.

Выведем формулу для функции Грина, позволяющую вычислять поле дифракции от заданного фронта с произвольным радиальным распределением поля. Ограничимся случаем, когда угол падения равен нулю. Задав вначале $E_0 = E_0 \cdot \delta(r' - r_0)$, взяв интеграл (26) по φ , можем записать:

$$GZ = -2\pi \frac{i}{k} E_0 (1 + \cos \theta) \frac{e^{ikr}}{r} \int \delta(r' - r_0) J_0(kr' \sin \theta) r' dr';$$

$$GZ = -2\pi \frac{i}{k} E_0 (1 + \cos \theta) \frac{e^{ikr}}{r} J_0(kr_0 \sin \theta) r_0$$

Если заданное поле направлено вдоль оси y , то выражение для функции Грина следующее:

$$\mathbf{GE}_{(y)} = iE_0(k^2 2\pi r_0)(1 + \cos\theta) \frac{e^{ikr}}{kr} J_0(kr_0 \sin\theta) [\mathbf{e}_\theta \cos\theta \sin\varphi + \mathbf{e}_\varphi \cos\varphi] \quad (28)$$

В случае, когда заданное поле направлено вдоль оси x, получаем:

$$\mathbf{GE}_{(x)} = iE_0(k^2 2\pi r_0)(1 + \cos\theta) \frac{e^{ikr}}{kr} J_0(kr_0 \sin\theta) \cdot [\mathbf{e}_\theta \cos\theta \cos\varphi - \mathbf{e}_\varphi \sin\varphi] \quad (29)$$

При произвольном распределении заданного поля $\mathbf{E}_0 = E_{0x} \cdot \mathbf{i} + E_{0y} \cdot \mathbf{j}$, используя выражения (28) и (29), общее решение задачи можно записать в виде:

$$\mathbf{E}_{(y)} = i(1 + \cos\theta) \frac{e^{i\bar{r}}}{\bar{r}} [\mathbf{e}_\theta \cos\theta \sin\varphi + \mathbf{e}_\varphi \cos\varphi] \int_0^\infty 2\pi \bar{r}_0 E_{0y}(\bar{r}_0) J_0(\bar{r}_0 \sin\theta) d\bar{r}_0 \quad (30)$$

$$\mathbf{E}_{(x)} = i(1 + \cos\theta) \frac{e^{i\bar{r}}}{\bar{r}} [\mathbf{e}_\theta \cos\theta \cos\varphi - \mathbf{e}_\varphi \sin\varphi] \int_0^\infty 2\pi \bar{r}_0 E_{0x}(\bar{r}_0) J_0(\bar{r}_0 \sin\theta) d\bar{r}_0 \quad (31)$$

Здесь использованы обычные обозначения $\bar{r} = kr$; $\bar{r}_0 = kr_0$. Дифракционные поля $\mathbf{E}_{(y)}$ $\mathbf{E}_{(x)}$ от компонент заданного поля \mathbf{E}_{0y} и \mathbf{E}_{0x} нужно векторно, покомпонентно сложить. Результирующее поле дифракции имеет две компоненты: полярную и азимутальную.

10. Обсуждение результатов вычислений по дифракции линейно поляризованного излучения на отверстиях различной формы.

Особенностью полученных результатов является наличие на дифракционной картине “полюсов”, точек с нулевым полем, расположенных вдоль направления \mathbf{E}_0 . Для $\mathbf{E}_0 \parallel y$ у таких точек две, их координаты $\varphi = \pm \pi/2$, $\theta = \pi/2$. При $\mathbf{E}_0 \perp y$ на полусфере наблюдения такая точка одна: $\varphi = \pi$, $\theta = \pi/2 - \theta_0$, рис. 9.

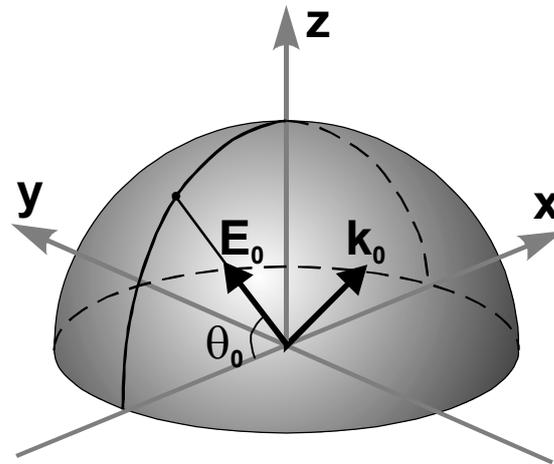


Рис.9. Возникновения "полюса", точки нулевого поля, при наклонном падении излучения на отверстие и при \mathbf{E}_0 , лежащем в плоскости падения.

Проиллюстрируем результаты, определяемые формулами (23-25, 27). За образование “полюсов” отвечает выражение $q(\theta, \varphi)$ и его вид не зависит от формы отверстия. Для сравнения, на рис. 10 показаны результаты расчетов дифракционной картины для круглого отверстия и узкой кольцевой щели. Радиус круглого отверстия и наружный радиус щели одинаковы. Дифракционные картинки похожи, но в первом случае центральный пик гораздо больше. Дифракция от узкого кольца может быть использована для вычисления поля дифракции при произвольном заданном радиальном распределении поля в плоскости x - y , не ограниченном экраном. В этом случае суждения, касающиеся полюсов, оказываются существенными и переходят в конечный результат. На рис. 11 приведено распределение амплитуды поля на полусфере θ , φ при дифракции на круглом и квадратном отверстиях. Угол падения 15° . Различия дифракционной картинки для разных направлений поляризации, при относительно больших отверстиях, визуально неразличимы.

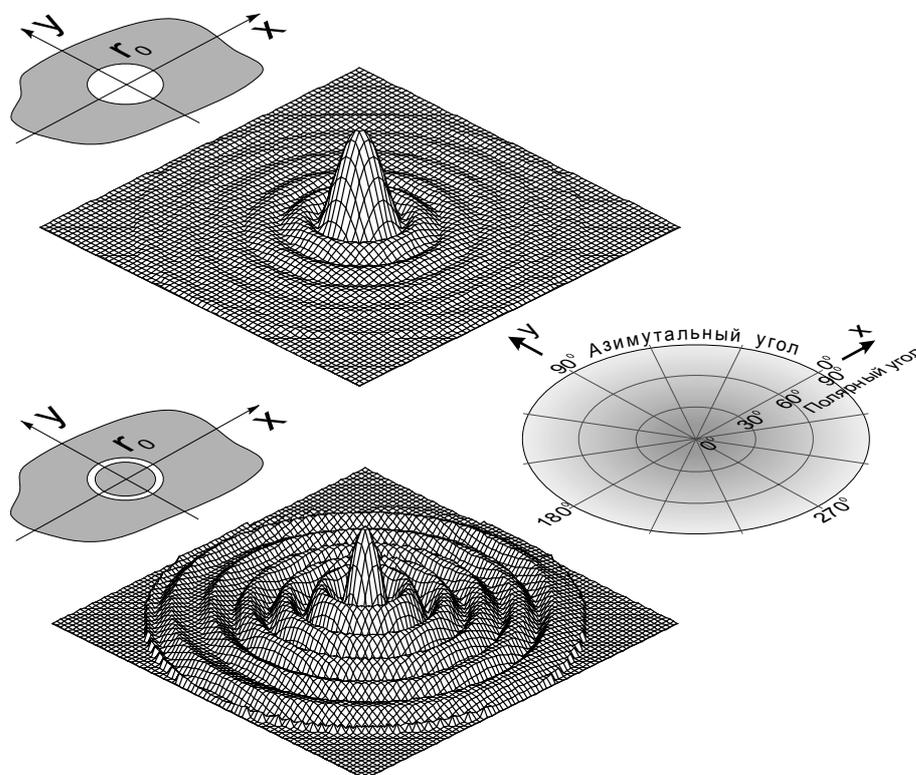


Рис.10. Сравнительные результаты расчетов дифракционной картины для круглого отверстия и узкой кольцевой щели. Радиус круглого отверстия и наружный радиус щели одинаковы ($r_0=6\lambda$). Ширина щели 0.1λ . Угол падения равен нулю.

По рис. 12 показана рассчитанная дифракционная картина при ромбовидной форме отверстия. Рисунки отличаются ориентацией большой диагонали ромба. На рис. 13 представлены результаты расчетов по формуле (25) для отверстия в виде двойного треугольника. Формулы для дифракции света на прямоугольном и круглом отверстии, приведенные в [11], и выведенные из ЭД-теории не описывают “полюса”, связанные с направлением вектора поля \mathbf{E}_0 .

Полученные здесь формулы отличаются от известных и дают не только качественные особенности дифракционной картины но и количественные уточнения распределение амплитуды поля на дифракционной картине. Точная количественная информация здесь очень важна, поскольку, например, направление максимума поля дифракции θ_m , вообще говоря, не совпадает с θ_0 , разница $\theta_0 - \theta_m$ зависит от угла падения и может больше 10 градусов.

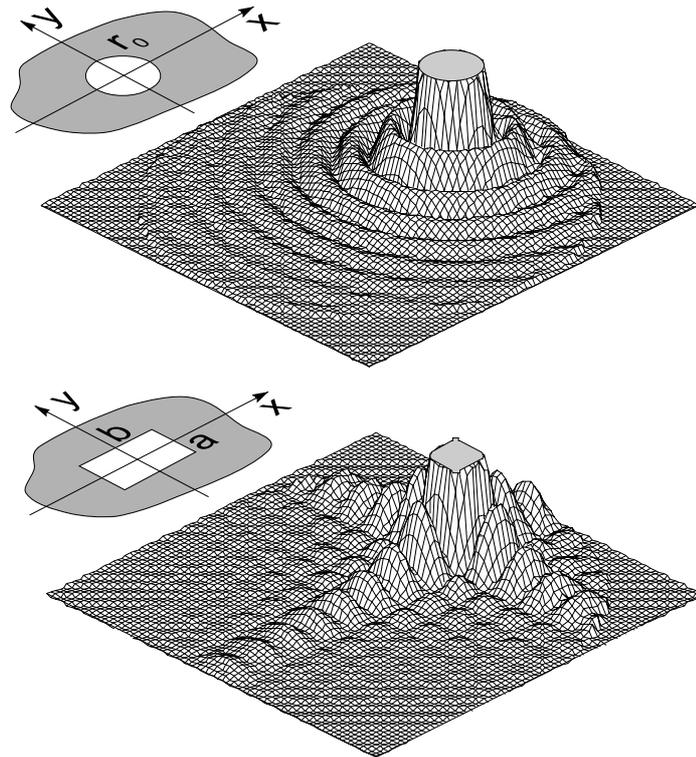


Рис.11. Распределение амплитуды поля на полусфере θ, φ (см. рис.10) при дифракции на круглом и квадратном отверстиях. Радиус круглого отверстия и стороны квадрата 6λ . Угол падения 15° . Главный пик нормирована на 1, усечен на уровне 0.3.

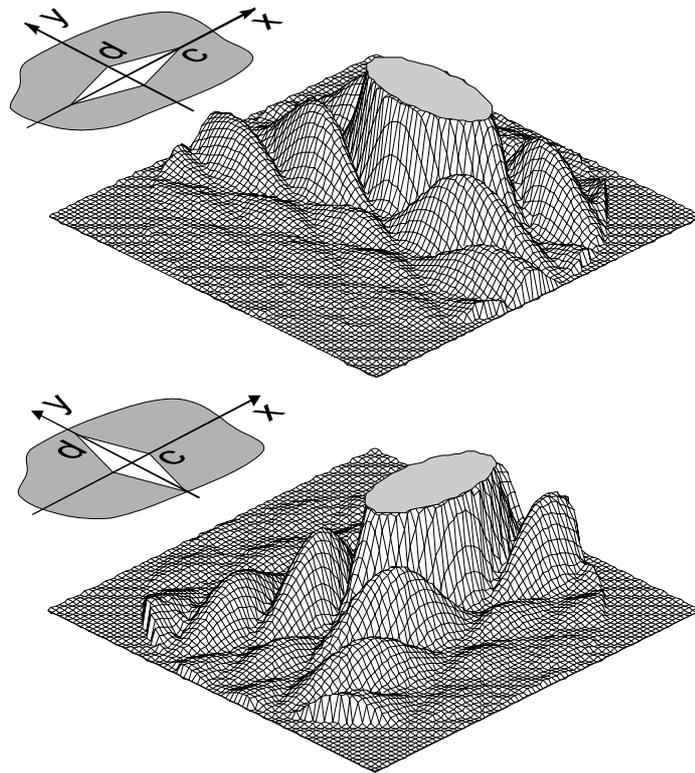


Рис.12. Распределение амплитуды поля на полусфере θ, φ (см. рис.10) при дифракции на ромбовидном отверстии. Диагонали ромба $c=6\lambda, d=3\lambda$ (вверху) и $c=3\lambda, d=6\lambda$ (внизу) Угол падения 10° . Главный пик нормирована на 1, усечен на уровне 0.3.

Решения некоторых дифракционных задач, полученные методом ЭД-теории не соответствуют принципу взаимности. В [11] этот факт прокомментирован следующим образом: "...Это несоответствие характерно для ряда задач в которых поверхностные токи задаются по формуле: $\mathbf{j} = \frac{c}{2\pi} [\mathbf{n} \mathbf{H}_0]$ ". Что касается представленного метода, то все приведенные выше решения принципу взаимности соответствуют. При $\varphi = 0; \pi$ углы θ и θ_0 взаимозаменяемы.

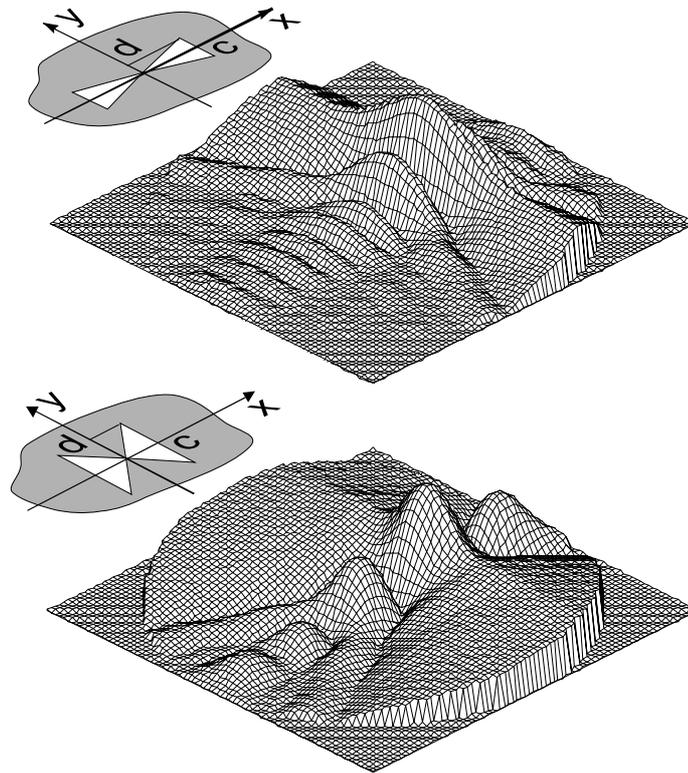


Рис.13. Дифракция света из отверстия «двойной треугольник» в системе координат θ, φ (см. рис.10). Угол падения 10° . Размеры отверстий $c=6\lambda, d=3\lambda$ (вверху), и $c=3\lambda, d=6\lambda$ (внизу).

11. Суперпозиция решений при дифракции на нескольких отверстиях.

Полученные векторные решения для дифракции на отдельных отверстиях позволяют, в принципе, описать дифракционную картину при наличии нескольких отверстий. Это делается путем векторного сложения полей, приходящих в данную точку от различных отверстий. Параметры падающих на отверстия волн: поляризация, амплитуда, относительный фазовый сдвиг и углы падения могут быть как одинаковыми, так и различными. Покажем формально справедливость такого подхода. Вся процедура вычислений поля дифракции включает три этапа:

1. По имеющемуся начальному распределению поля \mathbf{E}_0 необходимо восстановить распределение \mathbf{Z}_0 . Эти векторы связаны соотношением $\mathbf{E}_0 = \text{rot rot } \mathbf{Z}_0$.
2. Вычислить вектор Герца
$$\mathbf{Z}(\mathbf{r}) = \int_{S'} [G(\mathbf{n} \nabla) \mathbf{Z}_0 - \mathbf{Z}_0 (\mathbf{n} \nabla G)] dS'.$$
3. И, наконец, определить поле дифракции по формуле $\mathbf{E} = \text{rot rot } \mathbf{Z}$.

Можно записать, что поле дифракции \mathbf{E} может быть получено из начального \mathbf{E}_0 с помощью некоторого оператора, включающего все перечисленные операции. $\mathbf{E} = L(\mathbf{E}_0)$. Учитывая свойства используемых математических операций, можно определенно заключить, что этот оператор обладает аддитивностью. Если представить \mathbf{E}_0 в виде двух слагаемых $\mathbf{E}_0 = \mathbf{E}_0^1 + \mathbf{E}_0^2$,

то решение можно представить как: $\mathbf{E} = L(\mathbf{E}_0) = L(\mathbf{E}_0^1 + \mathbf{E}_0^2) = L(\mathbf{E}_0^1) + L(\mathbf{E}_0^2) = \mathbf{E}^1 + \mathbf{E}^2$. Это можно использовать, разложив начальное поле на компоненты вектора, помня, однако, что линейно поляризованное начальное поле, вообще говоря, дает поле дифракции с различными направлениями в разных точках наблюдения. Таким способом можно также рассматривать дифракцию от нескольких отверстий.

Прежде всего, необходимо обобщить полученные решения на случай произвольного положения отверстия в экране относительно начала координат. Обозначим координаты центра отверстия в произвольной системе координат как x_0 и y_0 . Для получения аналитических решений мы и здесь должны “рассматривать” дифракционную картину на больших расстояниях, т. е. полагать, что $x_0 \ll r$ и $y_0 \ll r$. Метод вычисления следующий. В разделе 5 мы оперировали координатами x', y' , по которым производилось интегрирование в плоскости экрана. Сохраним тот же смысл этих координат и сейчас, имея в виду что они относятся теперь не к исходной, произвольной системе координат (обозначим здесь координаты как x'', y''), а к системе координат с симметричным положением отверстия, где интегрирование производилось ранее. Все приближенные вычисления раздела 5 теперь с полным правом могут быть воспроизведены для координат x'', y'' , поскольку и размеры отверстий и смещения отверстий полагаются малыми по сравнению с r . Таким образом, искомые решения для произвольных, но малых x_0 и y_0 находятся путем замены в разделе 5 координат x', y' на выражения $x' + x_0$, $y' + y_0$, соответственно. Результатом такой математической операции является появление дополнительного сомножителя в решении, описывающего распределение фазы на полусфере наблюдения. Это распределение фазы связано с несимметричным, в исходной системе координат, положением отверстия. Вид этого сомножителя следующий:

$$F(\varphi, \theta, \theta_0, x_0, y_0) = \exp\{ik[x_0(\sin \theta_0 - \sin \theta \cos \varphi) - y_0 \sin \theta \sin \varphi]\} \quad (32)$$

Он не зависит от формы отверстия и поляризации падающего излучения и вводится во все конечные формулы. Так, например, формула (27) для круглого отверстия, смещенного относительно начала координат на x_0, y_0 принимает вид:

$$\mathbf{E} = -2 i E_0 \bar{S} \frac{e^{i\bar{r}}}{\bar{r}} e^{i\omega t} e^{i\Psi} (\cos \theta_0 + \cos \theta) F(\varphi, \theta, \theta_0, x_0, y_0) \frac{J_1(\bar{r}_0 M)}{\bar{r}_0 M} \cdot \mathbf{q}(\varphi, \theta); \quad (33)$$

Здесь мы для общности воспроизвели временной сомножитель и ввели произвольный фазовый сдвиг Ψ , позволяющий учитывать разность фаз лучей, падающих на различные отверстия. В общем случае при сложении решений дифракционное поле на полусфере наблюдения может быть не только линейно поляризованным; оно также может иметь в

различных точках круговую или эллиптическую поляризацию.

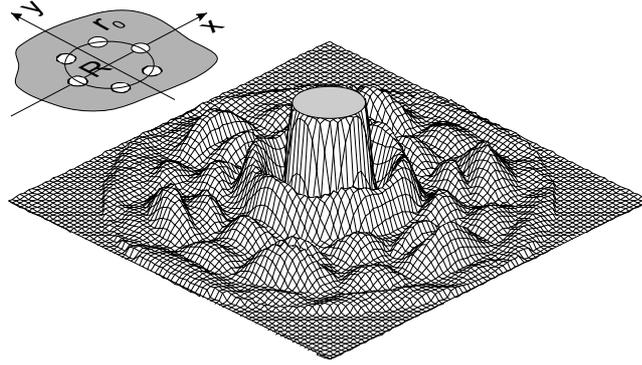


Рис.14. Дифракции плоской линейно поляризованной волны на шести круглых отверстиях. Амплитуда поля в координатах θ, φ (см. рис.10). Радиус отверстий $r_0 = \lambda$. Расстояние $R = 10\lambda$. Угол падения равен нулю.

Если отверстия одинаковы и расположены симметрично относительно начала координат, то результирующая формула упрощается, и фаза результирующего поля будет постоянна на полусфере наблюдения. Рассмотрим для примера дифракцию от шести круглых отверстий, равномерно размещенных на окружности радиуса R при падении на них плоской волны. Общее решение принимает вид:

$$\mathbf{E} = -2 i E_0 \bar{S} \frac{e^{i\bar{r}}}{\bar{r}} e^{i\omega t} (\cos \theta_0 + \cos \theta) (F_1 + F_2 + F_3) \frac{J_1(\bar{r}_0 M)}{\bar{r}_0 M} \cdot \mathbf{q}(\varphi, \theta); \quad (34)$$

G_1 соответствует первой паре отверстий, расположенных на оси x :

$$F_1 = 2 \cos \{kR (\sin \theta_0 - \sin \theta \cos \varphi)\},$$

а G_2 и G_3 двум другим парам отверстий:

$$F_{2,3} = 2 \cos \left\{ k \left[\frac{R}{2} (\sin \theta_0 - \sin \theta \cos \varphi) \pm \frac{\sqrt{3}R}{2} \sin \theta \sin \varphi \right] \right\}$$

На рис. 14 приведены результаты расчета дифракции плоской линейно поляризованной волны на шести круглых отверстиях, выполненные по формуле (34).

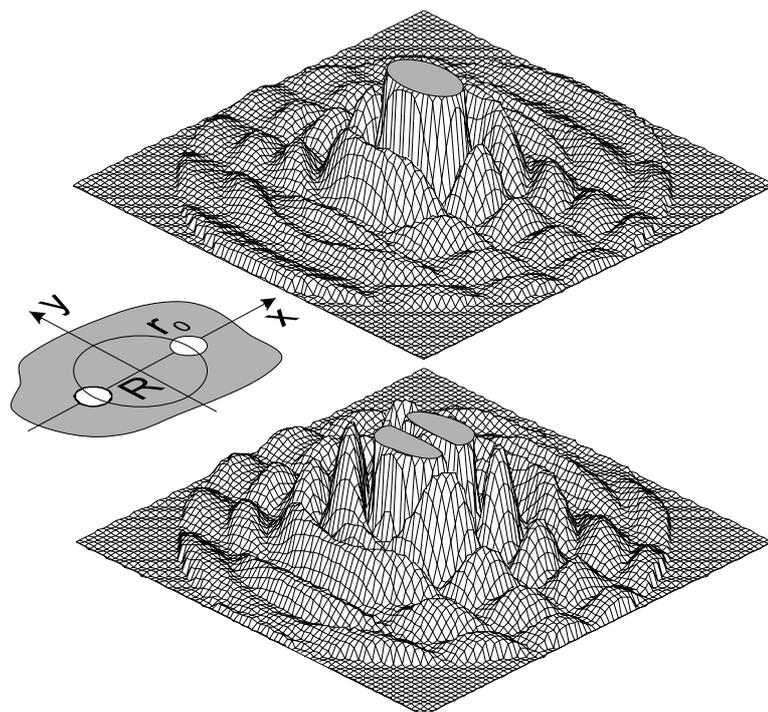


Рис.15. Дифракции плоской линейно поляризованной волны на двух круглых отверстиях. Амплитуда поля в координатах θ , φ (см. рис.10). Радиус отверстий $r_0 = \lambda$. Расстояние $R = 8\lambda$. Угол падения равен нулю. Разность фаз падающего на отверстия излучения равна нулю (вверху) и равна π (внизу).

Для двух отверстий, расположенных вдоль оси x на расстоянии R от начала координат в формуле (33) $F(\varphi, \theta, \theta_0, x_0, y_0) = 2 \cos\{kR(\sin \theta_0 - \sin \theta \cos \varphi)\}$ для случая нулевого фазового сдвига и $F(\varphi, \theta, \theta_0, x_0, y_0) = -2i \sin\{kR(\sin \theta_0 - \sin \theta \cos \varphi)\}$, если колебания поля на отверстиях происходят в противофазе. Поле дифракции для этих двух случаев представлено на рис. 15. На следующем рисунке (рис.16), приведены результаты расчетов распределения амплитуды поля дифракции от двух круглых отверстий, когда излучение падает на них под разными углами $\pm\alpha$. По двум приведенным рисункам, для $\alpha = 5^\circ$ (вверху), и $\alpha = 15^\circ$ (внизу) можно судить об эволюции дифракционной картины при увеличении угла падения. Проанализируем случай, схематически изображенный на рис.16. Пусть плоскости падения излучения на отверстия совпадают, а углы падения одинаковы, но отличаются знаком.

Если вектора полей, падающих на отверстия, перпендикулярны плоскости падения (векторы поля параллельны), то поля дифракции в любой точке от обоих отверстий имеют одинаковое направление, а отличаются амплитудой и фазой. Можно определенно заключить, что результирующее поле дифракции в любой точке линейно поляризованное.

Если же вектора полей, падающих на отверстия, лежат в плоскости падения излучения, то они не параллельны, образуют угол 2α . В этом случае поля дифракции в любой точке от двух отверстий отличаются не только амплитудой и фазой, но и направлением. Результирующее поле дифракции от двух отверстий может быть как линейно так

эллиптически поляризованным в различных точках полусферы наблюдения.

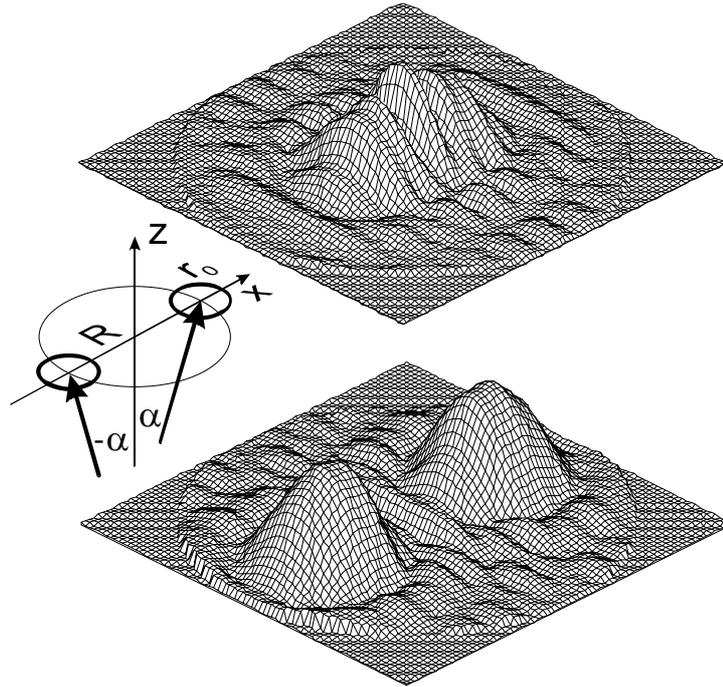


Рис.16. Дифракция из двух круглых отверстий в системе координат θ, φ (см. Рис.10). Радиус отверстий $r_0=3\lambda$. Расстояние $R=5\lambda$. Угол падения лучей на отверстия $\pm\alpha$ ($\alpha=5^\circ$ вверх, $\alpha=15^\circ$ вниз).

12. Дифракция излучения с азимутальной поляризацией на кольцевой щели.

Учитывая, что моды с азимутальным и радиальным направлением поляризации хорошо известны в теории волноводов и открытых резонаторов, решим также задачу дифракции света с такой поляризацией на кольцевой щели. Ограничимся случаем нулевого угла падения $\theta_0=0$.

Сделав предположение, что в пределах кольцевой апертуры (рис. 3е) $\mathbf{Z}_0 = Z_0 e^{ikz} \mathbf{e}_\varphi$, непосредственной подстановкой в (6) нетрудно убедиться, что и в этом случае имеет место соотношение $\mathbf{E}_0(\mathbf{r}') = -k^2 \mathbf{Z}_0(\mathbf{r}')$. Задача вычисления вектора Герца сводится к интегралу:

$$\mathbf{Z} = \frac{i}{k} E_0 (1 + \cos \theta) \frac{e^{ikr}}{r} \int_{r'}^0 \int_0^{2\pi} \mathbf{n}_\varphi e^{-ikr' \sin \theta \cos(\varphi - \varphi')} r' d\varphi' dr'.$$

Записав \mathbf{n}_φ в виде $\mathbf{n}_\varphi = -\mathbf{n}_x \sin \varphi + \mathbf{n}_y \cos \varphi$, приходим к скалярным интегралам:

$$\mathbf{Z}_x = -\mathbf{n}_x \frac{i}{k} E_0 (1 + \cos \theta) \frac{e^{ikr}}{r} \int_{r'}^0 \int_0^{2\pi} \sin \varphi' \cdot e^{-ikr' \sin \theta \cos(\varphi - \varphi')} \cdot r' \cdot d\varphi' \cdot dr'$$

$$\mathbf{Z}_y = \mathbf{n}_y \frac{i}{k} E_0 (1 + \cos \theta) \frac{e^{ikr}}{r} \int_{r'}^0 \int_0^{2\pi} \cos \varphi' \cdot e^{-ikr' \sin \theta \cos(\varphi - \varphi')} \cdot r' \cdot d\varphi' \cdot dr'$$

Далее используя известные преобразования [18]:

$$\int_0^{2\pi} \sin(n\beta) \exp(it \cos(\beta - \gamma)) d\beta = 2\pi i^n J_n(t) \sin(n\gamma),$$

$$\int_0^{2\pi} \cos(n\beta) \exp(it \cos(\beta - \gamma)) d\beta = 2\pi i^n J_n(t) \cos(n\gamma)$$

и представив начальное поле в виде $E_0 = E_0 \delta(r' - r_0)$ получаем для вектора Герца:

$$\mathbf{GZ} = \mathbf{e}_\varphi E_0 2\pi r_0 (1 + \cos \theta) \frac{e^{ikr}}{kr} J_1(k r_0 \sin \theta).$$

В этом случае вычислять поле по формуле (6) удобно в сферических координатах. Оно принимает вид:

$$\mathbf{GE} = \mathbf{e}_\varphi k^2 E_0 2\pi r_0 (1 + \cos \theta) \frac{e^{i\bar{r}}}{\bar{r}} J_1(k r_0 \sin \theta), \quad (35)$$

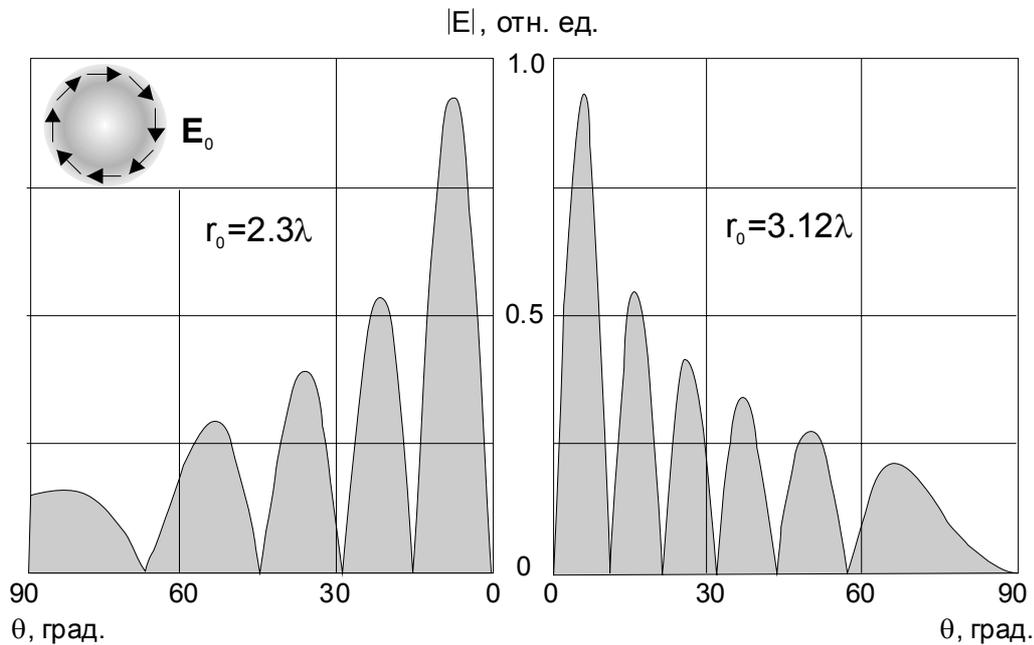


Рис.17. Дифракция азимутально поляризованного поля на кольцевой щели при двух радиусах щели. Угол падения равен нулю.

Вдоль полярной оси, при $\theta=0$ поле равно нулю. Величина поля вдоль экрана, $\theta=\pi/2$, зависит от радиуса щели и может быть как равной нулю, так и отличной от нуля, рис. 17. Общее решение для $E_0(r_0)$ определяется интегралом:

$$\mathbf{E} = \mathbf{e}_\varphi (1 + \cos \theta) \frac{e^{i\bar{r}}}{\bar{r}} \int_0^\infty 2\pi \bar{r}_0 E_0(\bar{r}_0) J_1(\bar{r}_0 \sin \theta) d\bar{r}_0. \quad (36)$$

где, как обычно, $\bar{r} = k r$; $\bar{r}_0 = k r_0$.

13. Дифракция излучения с радиальной поляризацией на кольцевой щели.

В этом случае решение для вектора Герца имеет аналогичный вид:

$$\mathbf{GZ} = E_0 (2\pi r_0) \left(1 + \frac{z}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} \right) \frac{e^{ik\sqrt{\rho^2 + z^2}}}{k\sqrt{\rho^2 + z^2}} J_1 \left(k r_0 \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} \right) \mathbf{e}_\rho.$$

Форма записи адаптирована к вычислениям электрического поля (6) в цилиндрической системе координат. Результаты вычислений дают следующую формулу:

$$\mathbf{GE} = k^2 E_0 2\pi r_0 \frac{e^{i\bar{r}}}{\bar{r}} (1 + \cos \theta) \cos \theta J_1(\bar{r}_0 \sin \theta) \left\{ \cos \theta \mathbf{e}_\rho + \left[\frac{i}{\bar{r} \sin \theta} - \sin \theta \right] \mathbf{e}_z \right\}.$$

Здесь для удобства записи введены естественные обозначения через $\bar{r} = \sqrt{\rho^2 + z^2}$ и полярный угол θ , отсчитываемый от вертикальной оси.

Удобно разложить полученное выражение на два: поле с меридиональным направлением и поле, направленное по оси z . Последнее сдвинуто по фазе на $\pi/2$.

$$\mathbf{GE}_\theta = k^2 E_0 2\pi r_0 \frac{e^{i\bar{r}}}{\bar{r}} (1 + \cos \theta) \cos \theta J_1(\bar{r}_0 \sin \theta) \mathbf{e}_\theta \quad (37)$$

$$\mathbf{GE}_z = ik^2 \frac{\bar{r}_0}{\bar{r}} E_0 2\pi r_0 \frac{e^{i\bar{r}}}{\bar{r}} (1 + \cos \theta) \cos \theta \frac{J_1(\bar{r}_0 \sin \theta)}{\bar{r}_0 \sin \theta} \mathbf{e}_z \quad (38)$$

Распределение поля по формулам (37, 38) приведено на рис. 18. Чисто продольная составляющая поля (38) имеет малую величину (сомножитель r_0/\bar{r}), но максимум этого поля находится на оси, где меридиональная составляющая поля (37) равна нулю. Кроме того, продольная составляющая поля сдвинута по фазе на $\pi/2$ по отношению к меридиональному полю. Магнитное поле имеет только азимутальную компоненту и вместе с софазной меридиональной компонентой электрического поля “формирует” радиальный волновой вектор сферической волны. Что касается продольной составляющей поля, то она имеет сдвиг фазы $\pi/2$ по отношению к магнитному полю, а значит усредненный по времени волновой вектор, связанный с этой компонентой электрического поля, равен нулю.

Общее решение для $E_0(r_0)$ находится по формулам:

$$\mathbf{E}_\theta = \mathbf{e}_\theta \frac{e^{i\bar{r}}}{\bar{r}} (1 + \cos \theta) \cos \theta \int_0^\infty 2\pi \bar{r}_0 E_0(\bar{r}_0) J_1(\bar{r}_0 \sin \theta) d\bar{r}_0 \quad (39)$$

$$\mathbf{E}_z = \mathbf{e}_z i \frac{e^{i\bar{r}}}{\bar{r}} (1 + \cos \theta) \cos \theta \int_0^\infty 2\pi \bar{r}_0 \left(\frac{\bar{r}_0}{\bar{r}} \right) E_0(\bar{r}_0) \frac{J_1(\bar{r}_0 \sin \theta)}{\bar{r}_0 \sin \theta} d\bar{r}_0 \quad (40)$$

Здесь применены безразмерные обозначения $\bar{r} = k r$; $\bar{r}_0 = k r_0$. Выводы, сделанные выше в отношении меридиональной и продольной (вдоль оси z) компонент поля в полной мере переносятся и на общий случай.

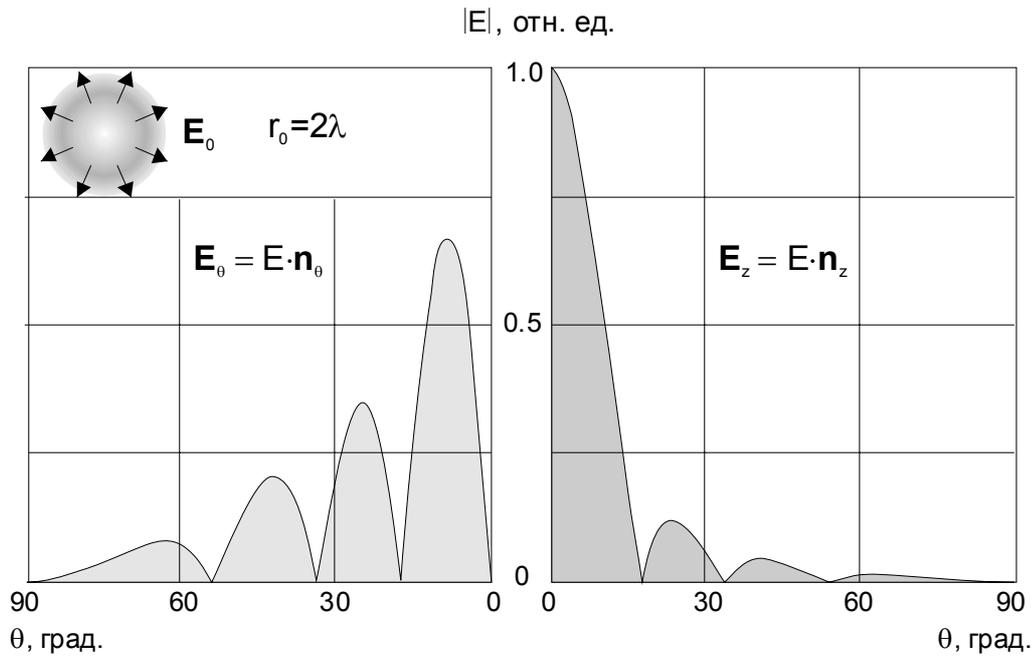


Рис.18. Дифракция радиально поляризованного поля на кольцевой щели при нулевом угле падения. Слева - компонента поля, направленная по меридиану E_θ , справа - продольная компонента поля E_z , направленная вдоль оси z . Меридиональная и продольная компоненты поля сдвинуты по фазе на $\pi/2$. Относительный масштаб двух кривых не согласован.

14. Распространение лазерных пучков в пространстве

Покажем на нескольких примерах применимость полученных выражений для функций Грина к вычислению формул, описывающих распространение некоторых лазерных пучков в пространстве. Общий метод решения всех приведенных ниже задач следующий. Предполагается известным распределение поля в перетяжке лазерного луча, где волновой фронт плоский, а фаза постоянна. С помощью полученных выше функций Грина, для соответствующих случаев, вычисляется поле дифракции на больших (по сравнению с характерным размером заданного поля) расстояниях, определяющее законы распространения пучка. В соответствии с общим подходом, получаемые решения являются векторными и не имеют ограничения параксиальности, характерного, например, для классических формул распространения Гауссовых пучков.

Рассмотрим основную моду TEM_{00} Лагерр-Гауссовых пучков. Примем для определенности, что заданное поле линейно поляризовано, а вектор поля направлен вдоль оси y . В формулу (30) мы должны подставить распределение поля, соответствующее этой моде:

$$E_a = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1}{w_0} \cdot \exp(-R_0^2); \quad R_0 = r/w_0$$

и взять интеграл:

$$\mathbf{E} = i \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1}{w_0} \cdot (1 + \cos \theta) \frac{e^{i\bar{r}}}{\bar{r}} \left[\mathbf{e}_\theta \cos \theta \sin \varphi + \mathbf{e}_\varphi \cos \varphi \right] \int_0^\infty 2\pi \bar{r}_0 \exp\left(-\frac{\bar{r}_0^2}{k^2 w_0^2}\right) J_0(\bar{r}_0 \sin \theta) d\bar{r}_0 ,$$

воспользовавшись известной формулой:

$$\int_0^\infty x^{v+1} e^{-\alpha x^2} J_v(\beta x) dx = \frac{\beta^v}{(2\alpha)^{v+1}} \exp\left(-\frac{\beta^2}{4\alpha}\right).$$

Несложные преобразования приводят к окончательной формуле, описывающей в векторной форме распространение Гауссова пучка в сферических координатах:

$$\mathbf{E} = E_0 \cdot (1 + \cos \theta) \frac{e^{i\bar{r}}}{\bar{r}} \left[\mathbf{e}_\theta \cos \theta \sin \varphi + \mathbf{e}_\varphi \cos \varphi \right] \exp\left(-\frac{\bar{w}_0^2}{4} \sin^2 \theta\right); \quad \bar{r} = kr; \quad \bar{w}_0 = kw_0 \quad (41)$$

Совершенно аналогично можно получить векторные формулы для распространения азимутально и радиально поляризованных пучков. Распределение заданного поля в этих случаях для низшей моды TEM_{01} * описывается формулой:

$$E_a = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1}{w_0} \cdot (\sqrt{2}R_0) \cdot \exp(-R_0^2); \quad R_0 = r/w_0$$

Для поля с азимутальной поляризацией нужно пользоваться формулой (36), подставить выражение для поля и взять интеграл аналитически. Получим окончательную формулу:

$$\mathbf{E} = \mathbf{e}_\varphi E_0 \frac{e^{i\bar{r}}}{\bar{r}} (1 + \cos \theta) \sin \theta \exp\left(-\frac{\bar{w}_0^2}{4} \sin^2 \theta\right); \quad \bar{r} = kr, \quad \bar{w}_0 = kw_0 \quad (42)$$

Рассмотрим заданное поле с радиальной поляризацией. В результате аналогичных вычислений, с использованием формул (39) и (40) получим следующие выражения для меридиональной и продольной компонент поля:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_\theta &= \mathbf{e}_\theta E_0 \frac{e^{i\bar{r}}}{\bar{r}} (1 + \cos \theta) \cos \theta \sin \theta \exp\left(-\frac{\bar{w}_0^2}{4} \sin^2 \theta\right) \\ \mathbf{E}_z &= \mathbf{e}_z i E_0 \frac{e^{i\bar{r}}}{\bar{r}} \frac{\bar{w}_0}{\bar{r}} (1 + \cos \theta) \cos \theta \exp\left(-\frac{\bar{w}_0^2}{4} \sin^2 \theta\right) \end{aligned} \quad (43)$$

В данном случае, как и при рассмотрении дифракции радиально поляризованного излучения на кольцевой щели, продольная составляющая поля имеет малую величину по сравнению с меридиональным полем, но максимум этого поля находится на оси, где меридиональная составляющая поля равна нулю. Продольная составляющая поля также сдвинута по фазе на $\pi/2$ по отношению к меридиональному полю.

Последний пример касается распространения Бесселевых пучков. Рассмотрим случай ограниченной апертуры начального поля, описываемого функцией Бесселя нулевого

порядка. Граница апертуры – окружность. В апертуру попадает заданное, но произвольное число нулей функции Бесселя: $E_a \sim J_0(a_n r/r_a)$, $r \leq r_a$. Здесь r_a – радиус апертуры луча, соответствующий нулю функции Бесселя (n). Численный коэффициент a_n соответствует аргументу функции Бесселя при этом нуле $r = r_a$. Пусть заданное поле линейно поляризовано и направлено вдоль оси y . Как и в случае Гауссова пучка мы должны воспользоваться формулой (30), но подставить в интеграл функцию Бесселя. И в этом случае интеграл берется аналитически с использованием формулы:

$$\int_0^{r_a} r J_0(\alpha r) J_0(\beta r) dr = \frac{\alpha r_a J_1(\alpha r_a) J_0(\beta r_a)}{\alpha^2 - \beta^2}$$

В результате вычислений приходим к формуле:

$$\mathbf{E} = E_0 (1 + \cos \theta) \frac{e^{i\bar{r}}}{\bar{r}} \left[\mathbf{e}_\theta \cos \theta \sin \varphi + \mathbf{e}_\varphi \cos \varphi \right] \cdot \begin{cases} \frac{(a_n)^2}{(a_n)^2 - (\bar{r}_a \sin \theta)^2} J_0(\bar{r}_a \sin \theta) \\ \frac{a_n}{2} J_1(a_n) \quad \text{if } \bar{r}_a \sin \theta \rightarrow a_n \end{cases} \quad (44)$$

$$\bar{r} = kr; \quad \bar{r}_a = kr_a$$

На больших расстояниях $r \gg r_a$ характер распространения Бесселева пучка с расстоянием r не имеет никаких особенностей по сравнению с другими пучками. Рассмотренный общий случай включает распространение в свободном пространстве основной моды волноводного лазера, описываемой функцией Бесселя нулевого порядка и ограниченной стенками трубки по первому нулю функции Бесселя. В этом случае $n=0$, $a_0=2.405$.

Заключение.

Рассмотрен метод решения дифракционных задач, основанный на применении вектора Герца в интеграле Кирхгофа. При таком подходе отсутствуют жесткие ограничения по применимости, свойственные скалярному интегралу Кирхгофа, и его векторному обобщению, записанному для поля. Метод физически логичен и математически корректен, он не имеет внутренних противоречий, является полноценно векторным подходом и технически несложен. Поиск решения распадается на два этапа. Первый, вычисление вектора Герца, эквивалентен взятию дифракционного интеграла хорошо известного класса. Второй этап - вычисление поля. Здесь процедура взятия ротора существенно упрощается, если учесть порядок малости слагаемых при взятии производных. Решение зависит от поляризации, но при любом направлении линейной поляризации на апертуре оно может быть построено на основе двух базовых: для векторов начального поля параллельном и

перпендикулярном плоскости падения излучения. При падении плоской волны на большом расстоянии от апертуры получены аналитические векторные выражения для некоторых базовых задач дифракции. Это дифракция линейно поляризованного излучения на бесконечной щели, на отверстиях различной формы и на системе отверстий. Решены также задачи дифракции излучения с азимутальным и радиальным направлением поляризации на кольцевой щели. Качественной особенностью полученных решений является наличие “полюсов”, точек нулевого поля, накладывающихся на обычную дифракционную картину, состоящую из светлых и темных полос. Методом функции Грина получены, также, векторные аналитические формулы, описывающие распространение некоторых лазерных пучков в свободном пространстве без ограничений параксиального приближения. Решения удовлетворяют уравнениям Максвелла и принципу взаимности.

Литература

1. П. Я. Уфимцев Метод краевых волн в физической теории дифракции. М.: Советское радио, 1962, 240 с.
2. В. А. Фок Проблемы дифракции и распространения электромагнитных волн. М.: Советское радио, 1970, 520 с.
3. Х. Хёпл, А. Мауэ, К. Вестпфаль Теория дифракции: Пер. с нем. Под ред. Г. Д. Малюжинца. М.: Мир, 1964, -428 с.
4. С. Солимено, Б. Крозиньяни, П. Ди Порто Дифракция и волноводное распространение оптического излучения М.: Мир, 1989, 662 с.
5. Р.Б. Ваганов, Б.З. Каценеленбаум Основы теории дифракции М.: Наука 1982, 272с.
6. Зоммерфельд А. Оптика - М.: ИЛ, 1953.
7. М.Г. Белкина Дифракция электромагнитной волны на диске. В сборнике “Дифракция электромагнитных волн на некоторых телах вращения” М.: Советское радио, 1957. С.64-69.
8. W. Andrejewski. Zangew. Phys. 5, 178, 1953.
9. Ю.Ф. Нотт. Развитие методов расчета эффективной площади отражения радиолокационных целей. ТИИЭР, т.73, № 2, 1985, с.90-105.
10. В.В. Baker, E.T. Copson The mathematical theory of Huygens principle. Clarendon Press. Oxford 2nd ed. 1950.
11. Л.А. Вайнштейн Электромагнитные волны М.: Радио и связь 1988.
12. М. Борн, Э. Вольф Основы оптики М.: Наука 1973.
13. М.Б. Виноградова, О. В. Руденко, А. П. Сухоруков Теория волн М.: Наука 1979.
14. Б.С. Светов, В.П. Губаренко Аналитические решения электродинамических задач М.: Наука, 1982.
15. F. Kottler Annalen der Physik 71, 457-508, 1923.
16. I.A. Stratton, L.I. Chu Phys. Rev. 56, 1939, p. 99-107.
17. Дж. А. Стрэттон Теория электромагнетизма. М.-Л.: Гостехиздат, 1948.
18. J. J. Stamnes Waves in Focal Regions The Adam Hilder Series on Optics and Optoelectronics. IOP Publishing Ltd. Adam Hilder, Bristol and Boston 1986.

Приложение 1. Метод Кирхгофа [13].

Метод Кирхгофа решения дифракционных задач состоит в использовании интегральной теоремы, согласно которой значение функции u , являющейся решением скалярного уравнения Гельмгольца, в произвольной точке $M(x, y, z)$, находящейся внутри замкнутого объема, выражается через значение функции u и ее первой производной на поверхности, ограничивающей данный объем.

Метод Кирхгофа является математическим обобщением принципа Гюйгенса-Френеля, основная идея которого состоит в том, что волновое возмущение в некоторой точке пространства M есть результат интерференции волн, испускаемых вторичными источниками. Эти источники расположены на поверхности, проходящей между точкой M и реальным источником волн.

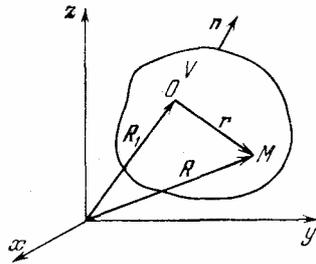


Рис. П1. К выводу интегральной теоремы Кирхгофа - Гельмгольца

Пусть $u(M)$ и $G(M)$ - комплексные функции координат точки M , имеющие непрерывные первые и вторые частные производные как внутри объема V , так и на поверхности S , ограничивающей объем V . Тогда согласно теореме Грина

$$\int_V (G \Delta u - u \Delta G) dV = \int_S \left(G \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial G}{\partial n} \right) dS \quad (\text{П1.1})$$

где $\partial/\partial n$ означает производную по направлению внешней нормали к объему V (см рис. П1).

Пусть функция u является комплексной амплитудой волнового поля и удовлетворяет внутри объема V однородному уравнению Гельмгольца (считаем, что зависимость от времени имеет вид $e^{-i\omega t}$):

$$\Delta u + k^2 u = 0 \quad (\text{П1.2})$$

В качестве функции G выберем функцию, удовлетворяющую уравнению

$$\Delta G + k^2 G = -4\pi \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (\text{П1.3})$$

\mathbf{r} - радиус-вектор точки M , \mathbf{r}' - радиус-вектор текущей точки O объема V . Важным решением уравнения (1.3) является функция

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{\exp i k |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

которая описывает сферическую волну единичной амплитуды; она называется *функцией точечного источника*, или *функцией Грина для свободного пространства*.

Определяя Δu и ΔG из (П1.2) и (П1.3) и подставляя в (П1.1), получим

$$\begin{aligned} 4\pi \int_V u(\mathbf{r}') \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') dV_1 &= \int_S \left(G \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial G}{\partial n} \right) dS \\ u(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi} \oint_S \left(G \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial G}{\partial n} \right) dS \end{aligned} \quad (\text{П1.4})$$

Формула (П1.4) называется *интегральной теоремой Кирхгофа-Гельмгольца*.

Приложение 2. Границы применимости интеграла Кирхгофа-Коттлера - обобщения метода Кирхгофа на случай векторных полей.

В разделе 1 приводились критические замечания, касающиеся вывода и применения интеграла Кирхгофа-Коттлера. Однако этот интеграл все же может использоваться для получения приближенных решений в весьма ограниченной области пространства и при определенных условиях.

Определим вначале границы применимости скалярного интеграла Кирхгофа. Пусть экран располагается, в плоскости x - y , а отверстие в нем - в начале координат. Рассмотрим нулевой угол падения и $\mathbf{E}_0 \parallel y$, рис.П2.1. Очевидно, что скалярное описание может использоваться лишь там, где направление дифрагированного поля приблизительно совпадает с направлением поля падающей волны. Проведем плоскость, перпендикулярную направлению \mathbf{E}_0 и проходящую через начало координат. Линия пересечения этой плоскости с полусферой наблюдения - полуокружность. Узкая полоска на полусфере наблюдения вблизи этой полуокружности и является областью применимости скалярного решения. Аналогично определяется и область применимости скалярного решения, для случая $\mathbf{E}_0 \perp y$.

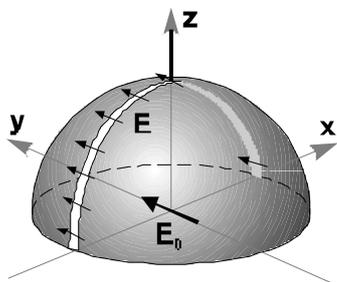


Рис.П2.1. Зона применимости скалярного решения для случая $\mathbf{E}_0 \parallel y$. Отверстие в начале координат.

Если “векторное поле” на диафрагме содержит компоненты E_x и E_y и мы векторно складываем покомпонентные скалярные решения, то делать это можно только в области справедливости обоих решений. Зона действия интеграла Кирхгофа-Коттлера в этом случае ограничена малым телесным углом вокруг оси z .

Из рис.П2.1 легко понять, что если “векторное поле” на диафрагме содержит не только компоненты E_x и E_y , но и компоненту E_z , решение этим методом вообще не может быть найдено, поскольку на полусфере наблюдения нет областей, в которых применимы скалярные решения для всех трех компонент.

Но даже эти, весьма жесткие ограничения применимости интеграла Кирхгофа-Коттлера не являются полными. В зоне, показанной на рис. П2.1 скалярное решение может быть как физически обоснованным, так и весьма ущербным. Если, например, отверстие круглое с центром в начале координат, то из соображений симметрии в зоне полосы справедливости решения (см. рис.П2.1) уравнение Максвелла $\text{div}\mathbf{E}=0$ приближенно выполняется. В случае несимметричного отверстия, например, произвольно расположенного треугольника это уравнение не выполняется и использование метода необоснованно.

Рассмотрим еще один весьма поучительный случай, представленный на рис.8. Если искать решение через скалярный интеграл Кирхгофа, то область его справедливости определяется аналогично рис.П2.1 и включает направление вдоль волнового вектора.

Но если поле на отверстии разложить на компоненты E_x и E_z , скалярно решить задачу для каждой из компонент, а потом векторно сложить решения, то область справедливости такого решения оказывается совершенно иной. Это малые телесные углы вдоль направления оси y , где решения физически малосодержательны. Рассмотренные ограничения применимости касаются как интеграла Кирхгофа-Коттлера, так и выводимых на его основе формул для \mathbf{E} и \mathbf{H} , записываемых в «векторном» виде.

Приложение 3. Электродинамический принцип Гюйгенса в формулировке Коттлера [11].

Электродинамический принцип Гюйгенса формулируется для замкнутой поверхности S , внутри которой нет источников электромагнитного поля, т. е. $\mathbf{j}^e = \mathbf{j}^m = 0$. Электромагнитное поле в точке наблюдения P , расположенной внутри поверхности S , может быть выражено как результат сложения волн, излученных вторичными источниками, расположенными на поверхности S . Если же точка наблюдения P находится вне поверхности S , то электромагнитное поле, порождаемое этими вторичными источниками, должно исчезать в силу отсутствия обратной волны. При практическом применении принципа Гюйгенса поверхность S можно преобразовать в поверхность, охватывающую действительные источники поля или затягивающую отверстие в экране и, кроме того, включающую в себя бесконечно удаленную сферу или полусферу, действие которой равно нулю.

Обозначим через \mathbf{E} , \mathbf{H} поле вторичных источников, расположенных на поверхности S . Это поле совпадает с истинным полем лишь внутри S , а вне S тождественно исчезает. Таким образом, поле \mathbf{E} , \mathbf{H} терпит скачок на поверхности S , что эквивалентно наличию на ней поверхностных электрических и магнитных токов с плотностями

$$\mathbf{i}_e = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{n} \mathbf{H}_0] \quad \mathbf{i}_m = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{n} \mathbf{E}_0] \quad (\text{П2.1})$$

где \mathbf{n} - нормаль к поверхности S , направленная в сторону области, занятой полем, \mathbf{E}_0 и \mathbf{H}_0 - фактические значения поля на поверхности S . **Поверхностные токи (П2.1) и являются теми вторичными источниками, о которых говорится в принципе Гюйгенса.**

Мы получим электродинамический принцип Гюйгенса в явной форме, если выразим поле \mathbf{E} , \mathbf{H} в точке наблюдения P внутри S через поверхностные токи (П2.1). Это поле выражается через электрический векторный потенциал и магнитный векторный потенциал. Интересующее нас поле возбуждается поверхностными токами, поэтому векторные потенциалы \mathbf{A}^e и \mathbf{A}^m принимают вид

$$\mathbf{A}_e = \frac{1}{c} \oint_S \frac{e^{ikr}}{r} \mathbf{i}_e dS; \quad \mathbf{A}_m = \frac{1}{c} \oint_S \frac{e^{ikr}}{r} \mathbf{i}_m dS \quad (\text{П2.2})$$

поскольку поверхностные токи можно рассматривать как предельный случай объемных. Здесь S означает поверхность, по которой текут поверхностные токи. Для поверхностных токов, определяемых формулами (П2.1), векторные потенциалы равны

$$\mathbf{A}_e = \frac{1}{4\pi} \oint_S \frac{e^{ikr}}{r} [\mathbf{n} \mathbf{H}_0] dS; \quad \mathbf{A}_m = \frac{1}{4\pi} \oint_S \frac{e^{ikr}}{r} [\mathbf{n} \mathbf{E}_0] dS \quad (\text{П2.3})$$

и полное электромагнитное поле дается выражениями:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -\frac{1}{ik} (\text{grad div } \mathbf{A}_e + k^2 \mathbf{A}_e) - \text{rot } \mathbf{A}_m \\ \mathbf{H} &= -\frac{1}{ik} (\text{grad div } \mathbf{A}_m + k^2 \mathbf{A}_m) + \text{rot } \mathbf{A}_e \end{aligned} \quad (\text{П2.4})$$

Это и есть искомое поле вторичных источников, распределенных по поверхности S . Вторичные источники на каждом элементе dS поверхности S являются элементарными диполями: электрическим диполем с моментом $-\frac{1}{i\omega} \mathbf{i}^e dS$ и магнитным диполем с моментом $-\frac{1}{i\omega} \mathbf{i}^m dS$

**Приложение 4. Сравнение ограничений и физических приближений,
лежащих в основе классического подхода
и дипольно волновой теории дифракции.**

	Скалярный интеграл Кирхгофа	Дипольно волновая теория
Исходное скалярное уравнение для функции Грина	Для поля E. Физической интерпретации для электромагнитного поля не имеет.	Для вектора Герца Z. Соответствует описанию поля излучения одиночного диполя.
Исходное скалярное уравнение для распространения поля в свободном пространстве	Для поля E. Формально недостаточно, Уравнение $\text{div}E=0$ не выполняется. Противоречит векторному характеру распространения света.	Для вектора Герца Z. Формально достаточно. Уравнение $\text{div}E=0$ выполняется. Описывает векторный характер распространения света.
Ограничения, связанные со скалярностью исходных уравнений	Решения скалярные, приближенно справедливы в малом телесном угле. Уравнение $\text{div}E=0$ не выполняется. Принципу взаимности решения не соответствуют. Некорректность покомпонентного векторного сложения скалярных решений, имеющих разные зоны приближенной справедливости.	Решения векторные, справедливы во всем телесном угле, при любых углах падения и любой поляризации Уравнение $\text{div}E=0$ выполняется. Принципу взаимности решения соответствуют. Корректность покомпонентного векторного сложения. Решения по компонентам векторные, зоны действия совпадают.
Общие ограничения, связанные с методом	Заданное поле на апертуре – поле падающей волны, невозмущенное краями. Характерный размер отверстия $a \gg \lambda$. Волновая зона, $k \cdot r \gg 1$. Приближение $r \gg a$, для получения решений в аналитическом виде.	